**УДК 624.046.5**

**DOI: 10.37153/2618-9283-2023-4-30-44**

***Теоретические и экспериментальные исследования***

## Оценка индекса надежности стержней ферм при интервальной неопределенности исходных данных

**Соловьев Сергей Александрович[1], Иньков Александр Эдуардович[1], Соловьева Анастасия Андреевна[1]**
[1]Вологодский государственный университет. Вологда, Российская Федерация

**Аннотация**. В статье представлен подход к оценке индекса надежности стержней стальных ферм при неопределенности случайных величин, выраженной в наличии информации лишь о границах изменчивости. Представлены различные способы оценки границ изменчивости случайных величин, а также предложен новый подход с использованием положений теории возможностей и неравенства Дворецкого-Кифера-Вольфовица (ДКВ). Индекс надежности позволяет сравнивать различные проектные решения по критерию безопасности, выявлять элементы конструкций с наибольшей вероятностью отказа для мониторинга технического состояния, а также позволят получить количественную оценку повышения уровня безопасности при усилении элементов строительных конструкций. Данные статистического моделирования методом Монте-Карло отражают аналогию индекса надежности в рассматриваемом подходе с вероятностью безотказной работы элемента фермы.

**Ключевые слова**: надежность, неопределенность, ферма, индекс надежности, безопасность, интервал, безвероятностный подход, риск

**Для цитирования**: Соловьев С.А., Иньков А.Э., Соловьева А.А. Оценка индекса надежности стержней ферм при интервальной неопределенности исходных данных // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2023. № 4. С. 30–44.
**DOI: 10.37153/2618-9283-2023-4-30-44**

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-79-01035, https://rscf.ru/project/23-79-01035/

***Theoretical and experimental studies***

## The reliability index estimation of truss rods with interval uncertainty of the initial data

**Sergey A. Solovev[1], Alexander E. Inkov[1], Anastasia A. Soloveva[1]**
[1]Vologda State University (VSU). Vologda, Russian Federation

**Abstract**. The article presents an approach to evaluation the reliability index of steel truss bars with the uncertainty of random variables expressed in the presence of information only about the bounds of variability. Different methods of estimating the bounds of variability for random variables are presented. The new approach is also developed using the provisions of the theory of possibility and the Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz inequality (DKW). The reliability index allows to compare various design solutions by the safety criterion, identify structural elements with the highest failure probability for monitoring the technical state and to quantify the increase in the safety level with strengthening of structural elements. The Monte Carlo statistical simulation data reflect the analogy of the non-probabilistic reliability index in the considered approach with the non-failure probability of the truss bar.

**Keywords**: reliability, uncertainty, truss, reliability index, safety, interval, non-probabilistic approach, risk

**For citation**: Solovev S.A., Inkov A.E., Soloveva A.A. The reliability index estimation of truss rods with interval uncertainty of initial data. *Earthquake engineering. Construction safety*. 2023, no. 4, pp. 30–44. (In Russian)
**DOI**: 10.37153/2618-9283-2023-4-30-44

**Funding:** The research was founded by Russian Science Foundation (RSF) No. 23-79-01035. https://rscf.ru/en/project/23-79-01035/

## Введение

Надежность строительного объекта – это его способность выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. В то же время в Eurocode 0 «Basis of structural design» отмечается, что «…надежность обычно выражается в вероятностных терминах». В настоящее время в РФ основным условием надежности строительных объектов является выполнение требований (критериев) для всех учитываемых предельных состояний при действии наиболее неблагоприятных сочетаний расчетных нагрузок в течение расчетного срока службы. Такой подход является основой метода предельных состояний. Как отмечает д.т.н., профессор О.В. Мкртычев: «Метод предельных состояний позволяет обеспечить необходимый уровень надежности зданий и сооружений, что подтверждается опытом проектирования, строительства и эксплуатации. Однако данный метод имеет ряд недостатков, например, невозможно сказать, какой уровень надежности в количественном измерении формируется в результате применения норм проектирования, одинаков ли этот уровень надежности для зданий и сооружений различных конструктивных схем и выполненных из различных материалов» [1].

Развитием метода предельных состояний, который иначе называется «полувероятностный подход», является полный вероятностный расчет на заданный индекс надежности или вероятность отказа. Количественная оценка уровня безопасности в виде индекса надежности или вероятности безотказной работы позволяет эффективно решать следующие задачи: сравнение проектных решений по критерию безопасности; выбор наименее надежного элемента сооружения для мониторинга технического состояния; оценка эффективности усиления строительных конструкций по критерию повышения уровня надежности и многие другие.

Для вероятностного анализа надежности необходима полная статистическая информация о случайных величинах в математической модели предельных состояний (вид распределения вероятностей, параметры распределения вероятностей, данные о зависимости/независимости случайных величин и др.). Как отмечено в ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований», использование вероятностно-статистических методов допускается при наличии достаточных данных об изменчивости основных параметров в случае, если количество (длина ряда) данных позволяет проводить их статистический анализ (в частности, эти данные должны быть однородными и статистически независимыми). Получение таких данных в практических задачах анализа надежности строительных конструкций может быть затруднительным. Так в [2] отмечается, что «В настоящее время во многих работах публикуются экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что распределения реально наблюдаемых случайных величин в подавляющем большинстве случаев отличны от нормального распределения. Да и в целом, по мнению многих исследователей, применение методов математической статистики некорректно, так как невозможно на практике с помощью реальных экспериментальных установок проверить достоверность полученных с их помощью результатов. То есть в рамках данного подхода мы имеем, что понятия генеральной совокупности, доверительного интервала для неизвестного среднего случайной величины, ошибки первого и второго рода при проверке гипотез и прочие – это «неверифицируемые» характеристики. Все эти и многие другие обстоятельства привели к появлению нестатистического подхода».

Например, в [3] отмечается, что «Во многих случаях при использовании вероятностной модели для анализа практических проблем неопределенности приходится делать предположения о распределении вероятностей для параметров. Однако существуют исследования, указывающие на то, что даже небольшое отклонение параметров распределения от реальных значений может привести к очень большой ошибке анализа надежности. С другой стороны, благодаря обширной инженерной практике было установлено, что, хотя очень трудно получить точные распределения вероятностей для случайных параметров, когда выборки недостаточны по объему или низкого качества, как правило, нетрудно получить интервалы их изменения на основе ограниченных данных и инженерного опыта. Например, при анализе обработки листового металла трудно получить распределение вероятности коэффициента трения между пресс-формой и листом из-за сложности моделирования смазочной среды; однако, основываясь на имеющемся опыте, можно утверждать, что такой коэффициент трения лежит в интервале [0,1… 0,2]».

Концепция оценки надежности, когда в качестве альтернативы вероятностным параметрам используется информация о границах изменчивости случайных величин, получила название безвероятностного (non-probabilistic) подхода к анализу надежности. Одними из основателей безвероятностного подхода к анализу надежности технических систем являются Яков Бен-Хаим (Yakov Ben-Haim) и Исаак Элишаков (Isaac Elishakoff). В своей фундаментальной работе «Convex models of uncertainty in applied mechanics» [4] они формулируют преимущества новой концепции перед традиционным вероятностно-статистическим подходом к анализу надежности. В исследовании [4] отмечается, что вероятность не является единственной отправной точкой для количественной оценки идеи надежности. Вероятностная надежность подчеркивает вероятность приемлемого функционирования системы. Безвероятностная надежность, как она предложена в концепции [4], подчеркивает диапазон приемлемого состояния функционирования технической системы. В вероятностных терминах система является надежной, если вероятность отказа системы достаточно мала. В безвероятностной формулировке надежности, техническая система является надежной, если диапазон колебаний функции предельного состояния приемлемо мал. Обе концепции обеспечения надежности связаны с проблемой неопределенности данных. В обоих методах проектные случайные величины рассматриваются как параметры управления неопределенности предельного состояния. При вероятностной концепции надежности проектные решения должны снижать вероятность отказа до приемлемого уровня. В случае безвероятностной концепции надежности, система или конструкция должна иметь обеспеченность того, что функция предельного состояния остается в границах приемлемой области.

Вероятностные методы или методы теории нечетких множеств требуют наличия функции распределения вероятностей или функции принадлежности для количественной оценки надежности. Как отмечают авторы в [5], «Архимед говорил: «Дайте мне точку опоры, и я переверну землю». В отличие от этого утверждения, аналитик, основывающий свои расчеты на вероятностных методах или нечетких множествах, по сути, произносит: «Дайте мне плотность распределения вероятностей или функцию принадлежности величин, и я оценю безопасность конструкции».

Индекс надежности в вероятностной концепции обозначается $\beta$ и отражает связь с вероятностью отказа через функцию Лапласа. Индекс надежности в безвероятностной концепции обозначается $\eta$. Существуют различные способы его интерпретации [6–9]. В отдельных интерпретациях он отождествляется с вероятностью безотказной работы [4] с условием $\eta \in [0;\ 1]$. В других [7–9], он является индикатором удаленности поверхности предельного состояния от начала координат системы и может принимать значения $\eta \in [0;\ \infty]$ или $\eta \in [-\infty;\ \infty]$. В связи с относительной новизной данной концепции анализа надежности, вопросы исследования данного показателя надежности и его нормирования еще остаются открытыми.

**Задачи исследования**

В настоящей работе предлагается исследовать подходы к оценке границ изменчивости случайных величин в виде интервала при анализе надежности элементов строительных конструкций, а также разработать новый подход к оценке данного интервала на основе теории возможностей и теории нечетких множеств. На основе методик по оценке границ изменчивости случайных величин предлагается рассмотреть алгоритмы оценки индекса надежности стержней фермы по имеющейся статистической информации.

**Методы исследования**

Рассмотрим имеющиеся подходы к построению границ изменчивости случайных величин. При принятии гипотезы о нормальном распределении случайной величины, для построения границ изменчивости может быть использовано «правило трех сигм» или правило «68–95–99.7» [10]. Правило трех сигм выражает традиционную эвристику, согласно которой почти все значения принимаются лежащими в пределах трех стандартных отклонений от среднего, и поэтому эмпирически можно рассматривать вероятность 99,7% как практически достоверную. Поэтому для случайной величины *X* может быть записано следующее выражение:

$$X \in \left[x^{l};\ \ x^{u}\right] = \left[m_x - 3\cdot S_x;\ \ m_x + 3\cdot S_x\right], \qquad (1)$$

где $m_x$ – математическое ожидание случайной величины *X*; $S_x$ – стандартное (среднеквадратическое) отклонение случайной величины *X*;

В практических задачах следует иметь ввиду, что математическое ожидание и стандартное отклонение выражаются в виде доверительных интервалов генеральной совокупности данных по выборочной совокупности. Таким образом, в неравенстве (1) выбирается комбинация интервальных параметров, создающая наиболее широкий интервал значений для случайной величины *X*.

Также следует учитывать, что выражение (1) справедливо для нормального закона распределения. Как было отмечено выше, в условиях ограниченной статистической информации не всегда можно достоверно выявить принадлежность выборки к конкретному закону распределения. В таких случаях для оценки границ изменчивости случайной величины может быть использовано неравенство Высочанского-Петунина:

$$\Pr\left(\left|X - m_x\right| \geq \lambda S_x\right) = \frac{4}{9\lambda^2}, \tag{2}$$

где $\lambda$ – любое положительное число с условием $\lambda > \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Преимуществом такого подхода является то, что данное неравенство справедливо в том числе и для резко асимметричных распределений, тем самым устанавливая границы для множества значений случайной величины, попадающих в определённый интервал.

Границы изменчивости случайной величины могут быть получены следующим образом: аналитически (3) или графически устанавливается значение параметра $\lambda$ для принятой доверительной вероятности; границы случайной величины вычисляются по формуле: $\left[\underline{x};\ \overline{x}\right] = \left[m_x - \lambda S_x;\ m_x + \lambda S_x\right]$. Параметры $m_x$ и $S_x$ также приведены для генеральной совокупности, поэтому в практических задачах используются их оценки в виде доверительных интервалов.

Рассмотрим еще один подход к назначению границ изменчивости случайной величины. Одним из подходов к анализу надежности элементов строительных конструкций при неполной статистической информации является использование положений теории возможностей и теории нечетких множеств. Так в [9] предложены треугольные функции принадлежности, на основе которых строятся две граничные функции распределения нечеткой переменной. Данные функции имеют аналитический вид:

$$\underline{\pi}_X(x) = \frac{x(1-\alpha) + a_x\alpha - X_{\min}}{a_x - X_{\min}} \quad \text{при} \quad x \in \left[X_{\min}; a_x\right], \tag{3}$$

$$\overline{\pi}_X(x) = \frac{X_{\max} - x(1-\alpha) - a_x\alpha}{X_{\max} - a_x} \quad \text{при} \quad x \in \left[a_x; X_{\max}\right], \tag{4}$$

где $X_{\min}$ и $X_{\max}$ – минимальное и максимальное значение из подмножества данных; $a_x = 0{,}5 \cdot \left(X_{\max} + X_{\min}\right)$ – параметр центра распределения; $\alpha \in [0;\ 1]$ – уровень среза (риска).

Нижняя граница интервала случайной величины может быть получена из условия $\underline{\pi}_X\left(x^l\right) = 0$, а верхняя граница из условия $\overline{\pi}_X\left(x^u\right) = 0$.

Субъективным параметром в таком подходе является уровень среза $\alpha$, которым необходимо задаваться. Для его назначения может быть использован следующий подход: вначале строится эмпирическая функция распределения случайной величины $F_{emp,X}(x)$ по имеющимся статистическим данным. Затем на основе неравенства Дворецкого-Кифера-Вольфовица (ДКВ) [12] или статистики Колмогорова-Смирнова строятся две граничные эмпирические функции распределения, которые формируют область (рис. 1), внутри которой находится действительная функция распределения случайной величины *X*. На основе неравенства ДКВ (5) могут быть получены границы действительного распределения вероятностей в виде:

$$\underline{F}_{DKW,X}(x) = F_{emp,X}(x) - \varepsilon \leq F(x) \leq \overline{F}_{DKW,X}(x) = F_{emp,X}(x) + \varepsilon, \tag{5}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\ln\frac{2}{\alpha}}{2n}}$; $\alpha$ – доверительная вероятность; *n* – число испытаний/измерений.

На основе неравенства (5) можно утверждать, что действительная функция распределения вероятностей $F(x)$, будет находиться в указанном интервале с вероятностью 1-$\alpha$.

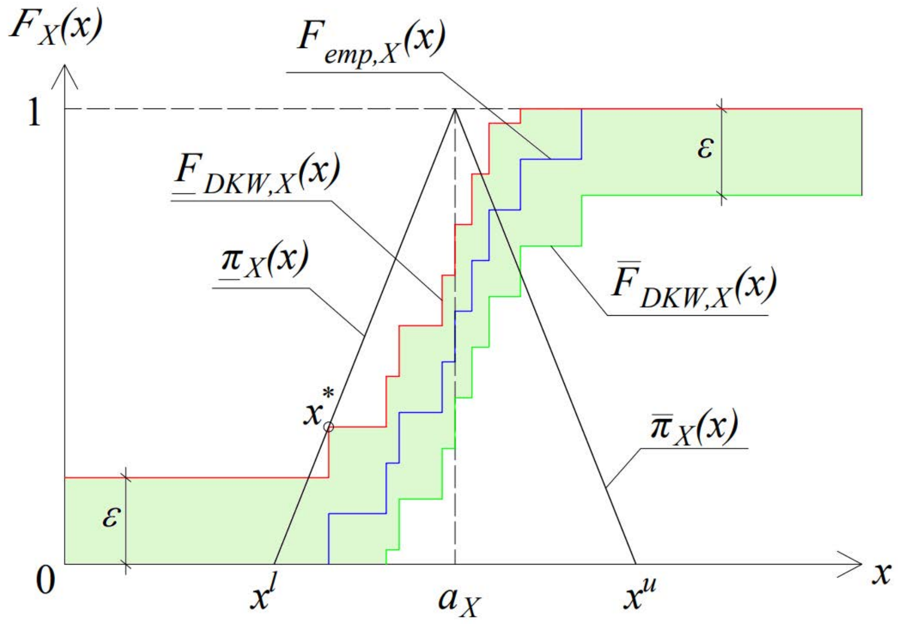


Рисунок 1 – Способ назначения уровня среза (риска) $\alpha$ для оценки границ изменчивости случайной величины

Figure 1– The method for assigning the cut-level (risk level) $\alpha$ for estimating the bounds of variability of a random variable

После построения граничных функций распределения $\underline{F}_{DKW,X}(x)$ и $\overline{F}_{DKW,X}(x)$, подбирается такое значение $\alpha$, чтобы функция $\underline{\pi}_X(x)$ касалась функции $\underline{F}_{DKW,X}(x)$ в точке $x^*$, которая соответствует первому «скачку» функции $\underline{F}_{DKW,X}(x)$. Далее, при подобранном значении уровня среза $\alpha$, по функциям (3)-(4) или графически вычисляются границы изменчивости случайной величины $X$ в виде интервала $X \in \left[x^l;\ \ x^u\right]$.

В [13] предлагается следующий подход к оценке границ изменчивости случайной величины:

$$x^l = x_{\min} - \frac{1}{2N-2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right),\ x^u = x_{\max} + \frac{1}{2N-2}\left(x_{\max} - x_{\min}\right),$$

где $x_{\max} = \max\limits_{1\le N\le j}\left(x_j\right),\ x_{\min} = \min\limits_{1\le N\le j}\left(x_j\right)$, $N$ – число испытаний/измерений.

Помимо статистического анализа имеющихся данных, границы интервала изменчивости случайной величины могут быть получены исходя из производственных или нормативных допусков. Например, затруднительно выявить функцию распределения изменчивости геометрических параметров поперечного сечения профилей стального проката. Большую роль здесь играет оборудование, на котором производятся профили, а также развитие системы внутреннего контроля качества на предприятии. Однако имеются допуски на толщину проката и размеры поперечного сечения выпускаемой продукции. На основе этих данных можно установить предельные граничные площади, моменты сопротивления и инерции для проката.

После того, как все случайные величины в математической модели предельного состояния представлены в виде интервалов, характеризующих границы их изменчивости, можно выполнять анализ надежности элемента по заданному критерию предельного состояния.

Рассмотрим математическую модель предельного состояния в общем виде с двумя случайными величинами $\tilde{x} \le \tilde{y}$, где $\tilde{x}$ – нагрузка на элемент; $\tilde{y}$ – несущая способность элемента. Как было отмечено выше, данные параметры можно представить в интервальной форме: $\tilde{x} \in [x^l;\ \ x^u]$, $\tilde{y} \in [y^l;\ \ y^u]$. Интервальные случайные величины, в соответствии с правилами интервальной арифметики [14], имеют следующие статистические характеристики: центр $x^c = \dfrac{x^u + x^l}{2}$, радиус $x^r = \dfrac{x^u - x^l}{2}$, аналогично для $\tilde{y}$.

Случайная величина также может быть представлена в нормализованной форме в виде [15]: $x = x^c + \delta_x x^r$, где $\delta_x \in [-1;\ +1]$.

Функция предельного состояния $g$ для рассматриваемой модели может быть выражена как $\tilde{g} = \tilde{y} - \tilde{x} \ge 0$. В [16] приводится выражение для вычисления индекса надежности при интервальном подходе:

$$\eta = \eta(\tilde{g} > 0) = \frac{g^c}{g^r}, \tag{6}$$

где $g^c$ и $g^r$ – параметры центра и радиуса для функции $g$.

В [5, 17] предложены другие подходы к оценке индекса надежности $\eta$. Индекс надежности выражается отношением отсеченной части геометрической фигуры $V_{safe}$, сформированной по интервальным данным, к ее общей площади, объему или гиперобъему $V$ (рис. 2). В таком случае индекс надежности $\eta$ можно соотносить с вероятностью отказа.

В этом случае необходимо трансформировать математическую модель предельного состояния к случайным величинам нормализованного вида:

$$\tilde{g} = \left(y^c + \delta_Y y^r\right) - \left(x^c + \delta_X x^r\right). \tag{7}$$

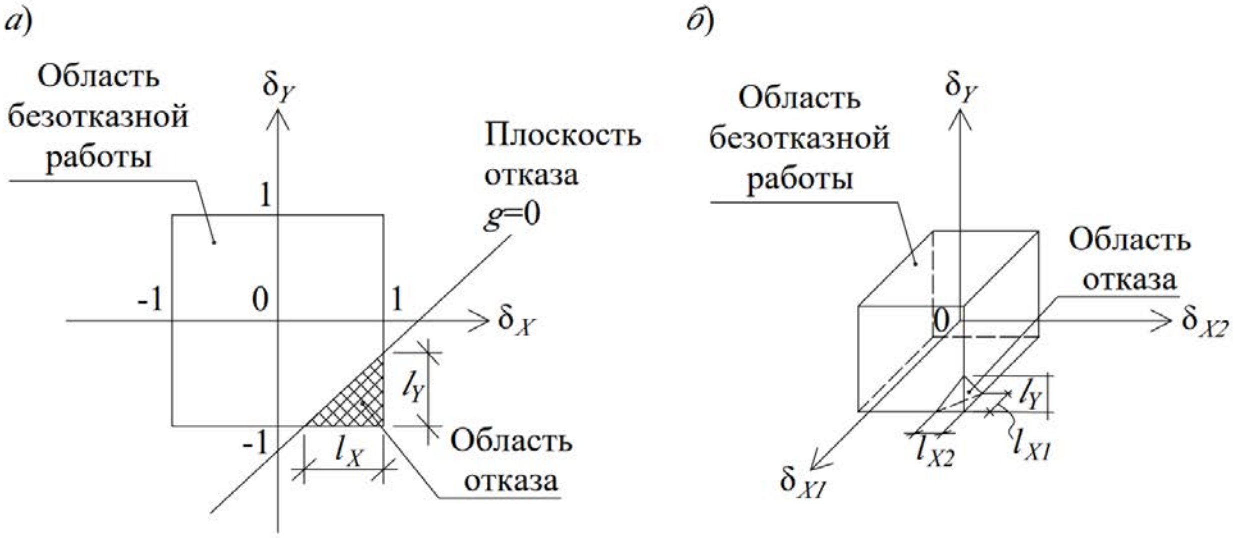


Рисунок 2 – Графический подход к определению индекса надежности $\eta$: а) двухмерное пространство; б) трехмерное пространство

Figure 2 – Graphical approach to estimation the reliability index $\eta$: a) two-dimensional space; b) three-dimensional space

В двухмерном случае (две случайные величины, рис. 2а) индекс надежности представляет собой отношение отсеченной части прямоугольника и его полной площади:

$$\eta = \eta(\tilde{g} > 0) = \frac{V_{safe}}{V} = 1 - \frac{V_{failure}}{V} = 1 - \frac{S_{failure}}{S} = 1 - \frac{\left(x^u - y^l\right)^2}{8 \cdot x^c \cdot y^c}, \tag{8}$$

где $S_{failure} = 0{,}5 l_x l_y = \dfrac{\left(x^u - y^l\right)^2}{2 \cdot x^c \cdot y^c}$ – площадь области отказа; $S$ – общая площадь прямоугольника, равная 4;

В трехмерном случае (три случайные величины, рис. 2б), например, для математической модели вида $\tilde{g} = \left(y^c + \delta_Y y^r\right) - \left(x_1{}^c + \delta_{X1} x_1{}^r\right) - \left(x_2{}^c + \delta_{X2} x_2{}^r\right)$, индекс надежности представляет собой отношение отсеченной части куба и его полному объему:

$$\eta = \eta(\tilde{g} > 0) = \frac{V_{safe}}{V} = 1 - \frac{V_{failure}}{V} = 1 - \frac{\left(x_1{}^u + x_2{}^u - y^l\right)^3}{48 \cdot x_1{}^c \cdot x_2{}^c \cdot y^c}, \tag{9}$$

где $V_{failure} = \dfrac{1}{6} l_{x1} \cdot l_{x2} \cdot l_y = \dfrac{\left(x_1{}^u + x_2{}^u - y^l\right)^3}{6 \cdot x_1{}^c \cdot x_2{}^c \cdot y^c}$ – объем отсеченной пирамиды.

На основе вышеописанного алгоритма, в [6] предложена следующая зависимость для оценки индекса надежности при интервальной оценке случайных величин для любой линейной математической модели предельного состояния:

$$\eta(g > 0) = 1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^u - \sum_{j=1}^{m} y_j^l\right)^{m+n}}{(m+n)! \cdot 2^{m+n} \cdot \prod_{i=1}^{m} x_i^c \prod_{j=1}^{n} y_j^c}, \tag{10}$$

где $n$ – число случайных величин условной «нагрузки»; $m$ – число случайных величин условной «несущей способности».

Отмечается [6], что уравнение (10) дает точное решение для математических моделей предельных состояний близких к линейным. Также следует отметить, что данные модели работают при малых вероятностях отказа, что встречается в подавляющем большинстве задач строительной практики. При больших значениях вероятности отказа, необходимо уточнять отношение областей отказа к общему объему фигур.

### Результаты исследования

Пусть требуется выполнить оценку индекса надежности элементов фермы с расчетной схемой по рис. 3.

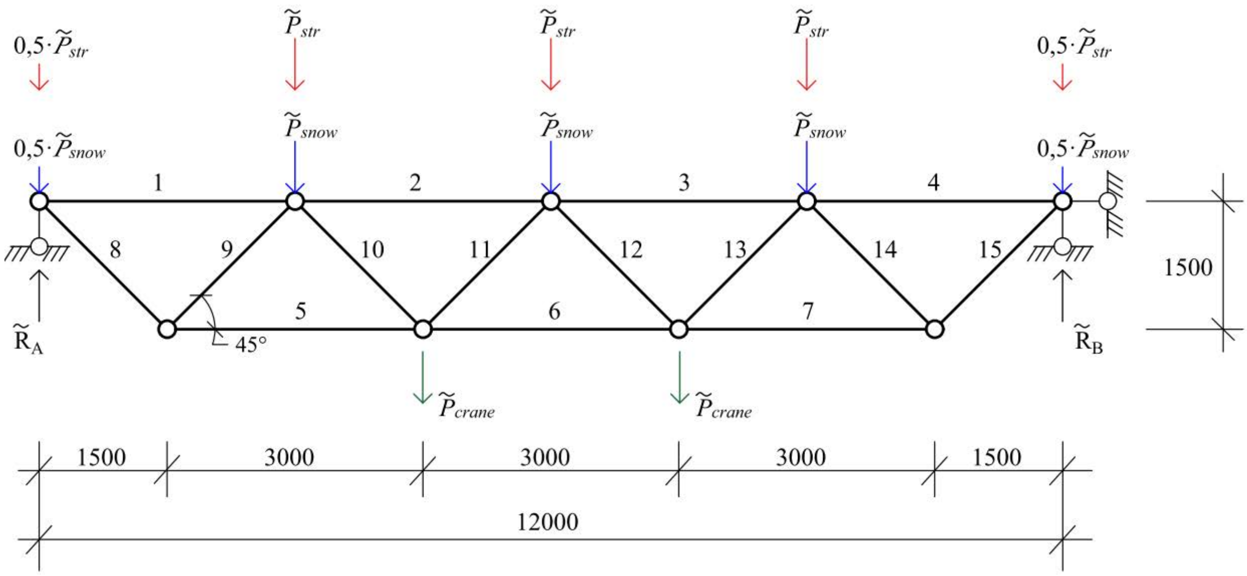


Рисунок 3 – Расчетная схема фермы со случайной нагрузкой

Figure 3 – Design scheme of the truss with random load

На ферму действуют нагрузки от веса конструкций покрытия $\tilde{P}_{str}$, вес снегового покрова $\tilde{P}_{snow}$, крановая нагрузка $\tilde{P}_{crane}$.

Рассмотрим пример оценки индекса надежности стержня 6 фермы по критерию прочности стали. Математическую модель предельного состояния можно записать в виде:

$$\tilde{P}_{str}\psi_{str} + \tilde{P}_{snow}\psi_{snow} + \tilde{P}_{crane}\psi_{crane} + \tilde{N}_{6,s-w} \le \tilde{N}_{ult} = \tilde{\sigma}_{s,ult} \cdot \tilde{A}_6, \tag{11}$$

где $\tilde{N}_{6,s-w}$ – усилие в стержне 6 фермы от собственного веса фермы; $\psi_i$ – геометрические коэффициенты фермы для определения усилий через нагрузки на ферму [18].

Усилие в стержне 6 фермы от собственного веса фермы определяется в интервальной форме следующим образом: для каждого профиля стержня фермы устанавливаются возможные границы изменчивости площади $\cdot\tilde{A}_{i-j} = \left[A^l_{i-j};\ A^u_{i-j}\right]$ в соответствии с нормативной документацией и допусками. Затем на ферму задаются нагрузки от собственного веса стержней фермы в двух вариантах: минимальные $q^l{}_{i-k,s-w} = A^l_{i-j} \cdot \rho^l_s$ и максимальные $q^u{}_{i-k,s-w} = A^u_{i-j} \cdot \rho^u_s$, где $\rho^l_s$ и $\rho^u_s$ – минимальная и максимальная плотность стали в соответствии с данными сертификатов на сталь. После чего вычисляют интервал значений усилия в стержне от собственного веса $\tilde{N}_{6,s-w} \in \left[N^l{}_{6,s-w};\ N^u{}_{6,s-w}\right]$ в прикладном программно-вычислительном комплексе.

Коэффициенты $\psi_i$ вычисляются путем расчета усилий в стержне фермы от *i*-го вида нагрузки с заменой значения нагрузки $\tilde{P}_i$ на единицу. Так для стержня 6 фермы с расчетной схемой по рис. 3 $\psi_{str} = \psi_{snow} = 4$ и $\psi_{crane} = 3$.

В соответствии с правилами интервальной арифметики [14], границы случайной величины $\tilde{N}_{ult}$ могут быть найдены (с учетом того, что прочность стали и площадь поперечного сечения не могут быть отрицательными) как $\tilde{N}_{ult} \in \left[\sigma^l{}_{s,ult} \cdot A^l{}_6;\ \sigma^u{}_{s,ult} \cdot A^u{}_6\right]$.

Индекс надежности $\eta$ стержня 6 фермы может быть вычислен как:

$$\eta = 1 - \frac{\left(4P_{str}^{u} + 4P_{snow}^{u} + 3P_{crane}^{u} + N_{6,s-w}^{u} - \sigma_{s,ult}^{l} \cdot A_{6}^{l}\right)^{1+4}}{(1+4)! \cdot 2^{1+4} \cdot 4P_{str}^{c} \cdot 4P_{snow}^{c} \cdot 3P_{crane}^{c} \cdot N_{6,s-w}^{c} \cdot \sigma_{s,ult}^{c} \cdot A_{6}^{c}}. \tag{12}$$

Рассмотрим пример. Нагрузки, приложенные на ферму (рис. 3), приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Нагрузки на ферму

Table 1 – Truss loads

| Наименование / Name | Обозначение / Designation | Нижняя граница, кН / Lower limit, kN | Верхняя граница, кН / Upper limit, kN | Центр интервала, кН / Interval center, kN |
|---|---|---|---|---|
| Вес конструкций / Weight of structures Nl | $P_{str}$ | 44,3 | 53,3 | 48,8 |
| Снеговая нагрузка / Snow load | $P_{snow}$ | 6,3 | 52,02 | 29,16 |
| Крановая нагрузка / Crane load | $P_{cran}$ | 75 | 85 | 80 |

Расчетные параметры фермы приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Расчетные параметры фермы

Table 2 – Design parameters for the truss

| № стержня Bar No. | $N^{l}_{s-w}$, кН/kN | $N^{u}_{s-w}$, кН/kN | $N^{c}_{s-w}$, кН/kN | $\psi_{str}$ | $\psi_{snow}$ | $\psi_{cran}$ | $A^{l}$, см²/cm² | $A^{u}$, см²/cm² | $A^{c}$, см²/cm² |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 4 | -2,36 | -2,6 | -2,48 | -1,5 | -1,5 | -1 | 26,1 | 28,84 | 27,47 |
| 2, 3 | -5,25 | -5,8 | -5,525 | -3,5 | -3,5 | -3 | 26,1 | 28,84 | 27,47 |
| 5, 7 | 4,19 | 4,63 | 4,41 | 3 | 3 | 2 | 25,04 | 27,68 | 26,36 |
| 6 | 5,61 | 6,2 | 5,905 | 4 | 4 | 3 | 25,04 | 27,68 | 26,36 |
| 8, 15 | 3,41 | 3,77 | 3,59 | $3/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | $2/\sqrt{2}$ | 14,2 | 15,7 | 14,95 |
| 9, 14 | -2,68 | -2,96 | -2,82 | $-3/\sqrt{2}$ | $-3/\sqrt{2}$ | $-2/\sqrt{2}$ | 14,2 | 15,7 | 14,95 |
| 10, 13 | 1,54 | 1,7 | 1,62 | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | $2/\sqrt{2}$ | 7,21 | 7,97 | 7,59 |
| 11, 12 | -0,55 | -0,61 | -0,58 | $-1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ | 0 | 7,21 | 7,97 | 7,59 |
| Прочность стали / steel strength - $\sigma_{ult}$ =[240; 270] МПа, $\sigma^{c}_{s,ult}$ =255 МПа | | | | | | | | | |

Вычислим индекс надёжности для всех стержней графическим способом: плоскость отказа будет отсекать часть от объема фигуры только для 6, 10 и 13 стержней. Отношение неотсеченных частей к общей площади прямоугольника приведено в таблице 3. Также в таблице приведен индекс надежности, вычисленный аналитически по формуле (12).

Для верификации результатов выполним численный эксперимент статистическим моделированием методом Монте-Карло. Запишем математическую модель (11) в виде:

$$\tilde{P}_{str}\psi_{str,i} + \tilde{P}_{snow}\psi_{snow,i} + \tilde{P}_{crane}\psi_{crane,i} + \tilde{N}_{i,s-w} \le \tilde{\sigma}_{s,ult} \cdot \tilde{A}_i \tag{13}$$

Пусть рассматриваемые случайные величины имеют нормальное распределение, а границы их изменчивости получены по правилу трех сигм. Для моделирования снеговой нагрузки используется распределение Гумбеля, как наиболее распростраенное в инженерном анализе надежности. Более подробно статистическое моделирование снеговой нагрузки описано в статье [18]. Для математической модели (13) выполним генерацию 10000 значений по нормальному распределению в программе PTC MathCAD (см рис. 4). Результаты приведены в таблице 3.

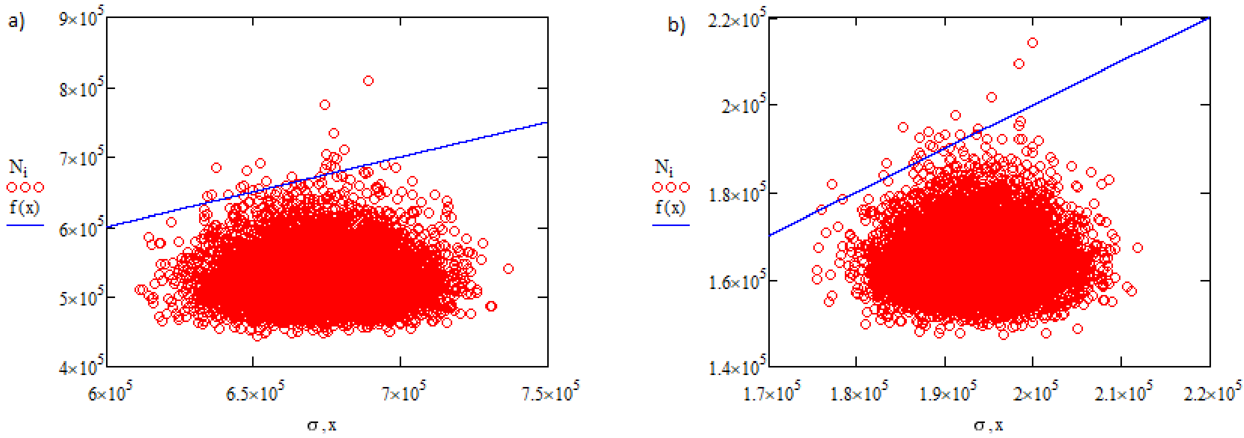


Рисунок 4 – Статистическое моделирование методом Монте-Карло:
а) для стержня №6; b) для стержня №10

Figure 5 – Statistical Data by Monte Carlo Simulation:
a) for bar No. 6; b) for bar No. 10

Таблица 3 – Сравнение результатов

Table 3 – Comparison of results

| № стержня Bar No. | Индекс надежности $\eta$ по критерию прочности стали графический способ | Индекс надежности $\eta$ по критерию прочности стали аналитический способ, по (10) | Вероятность безотказной работы в методе Монте-Карло |
|---|---|---|---|
| 1, 4 | 1,0000 | 5,6870 | 1,0000 |
| 2, 3 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 |
| 5, 7 | 1,0000 | 1,0007 | 1,0000 |
| 6 | 0,9587 | 0,9999 | 0,9980 |
| 8, 15 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 9, 14 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 10, 13 | 0,9465 | 0,9999 | 0,9979 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11, 12 | 1,0000 | 3,3349 | 1,0000 |

В классическом вероятностном подходе надежность фермы как последовательной механической системы следует определять путем произведения вероятностей безотказной работы ее элементов $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$. В рамках безвероятностного подхода предлагается определять надежность системы как отношение неотсеченной площади всеми функциями предельного состояния для всех стержней фермы к базовой площади прямоугольника (см. рис. 5). Так как угол наклона плоскости отказа для разных стержней отличается, можно вычислить надежность всей системы как отношение суммарной площади областей отказа для всех стержней фермы. В рассматриваемом случае область отказа для 10 и 13 стержня полностью включает в себя площадь отказа для 6 стержня. Таким образом, индекс надежности всей фермы как системы равен 0,94649. В рамках вероятностного подхода, произведение вероятностей для последнего столбца по таблице 3 даст результат 0,99260.

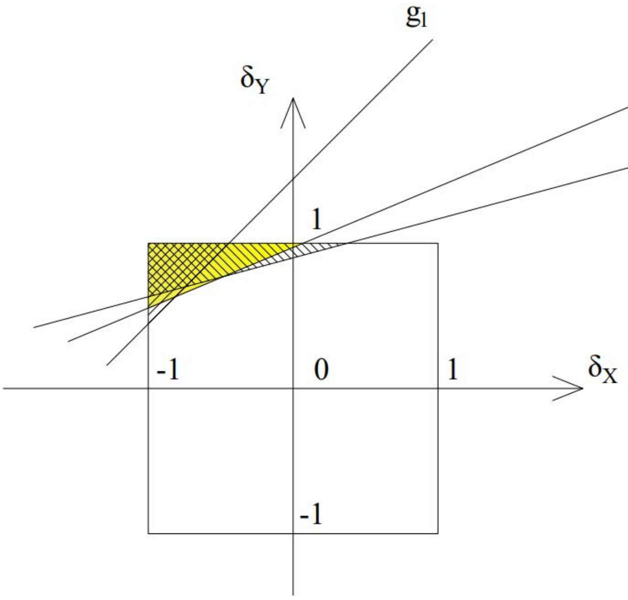


Рисунок 5 – Графическое определение индекса надежности $\eta$ для системы

Figure 5 – Graphical definition of the reliability index $\eta$ for a system

Таким образом, метод оценки надежности на базе интервальных оценок границ изменчивости случайных величин позволяет получить более осторожную оценку безопасности, что является актуальным при неполной статистической информации. В то же время такая может быть излишне консервативная с уменьшением алеаторной и эпистемологической неопределенности. В таком случае данный подход позволяет выявить наименее надежные фермы, которые могут быть комплексно обследованы для анализа надежности вероятностными методами для оценки безопасности эксплуатации всего сооружения. Помимо конструкционного анализа представленный подход можно использовать в других отраслях строительства, например, при диагностике технического состояния ограждающих конструкций новыми подходами [19], при моделировании динамических и сейсмических воздействий [20] и др.

**Выводы**

1. В статье представлен новый подход к оценке индекса надежности стержней стальных ферм с использованием при неопределенности случайных величин, выраженной в наличии информации лишь о границах изменчивости.

2. Данные статистического моделирования методом Монте-Карло отражают аналогию индекса надежности в рассматриваемом графическом подходе с вероятностью безотказной работы элемента фермы.

3. Индекс надежности $\eta$, определяемый графическим способом, занижает уровень вероятности безотказной работы, что вызвано отсутствием более точной информации о виде распределения вероятностей. Индекс надежности, определяемый аналитически по формуле (10), может быть использован для сравнительной оценки надежности элементов, но не для интерпретации вероятности безотказной работы элемента фермы.

**Список литературы**

1. Мкртычев О.В., Щедрин О.С., Лохова Е.М. Определение коэффициентов надежности по ответственности для отдельных несущих элементов на основе вероятностного анализа // *Вестник МГСУ*. 2022. Т. 17. Вып. 10. С. 1331–1346. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1331-1346

2. Адищев В.В., Шмаков Д.С. Метод построения функции принадлежности с «прямой» обработкой исходных данных // *Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин)*. 2013. Т. 16. № 2 (56). С. 45–66.

3. Jiang C., Zheng J., Han X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with both aleatory and epistemic uncertainties: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2018, vol. 57, no. 6, pp. 2485–2502. DOI: 10.1007/s00158-017-1864-4

4. Ben-Haim Y., Elishakoff I. Convex models of uncertainty in applied mechanics. – Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo: Elsevier, 1990. 240 p.

5. Elishakoff I., Daphnis A. Simple application of interval analyses to structural safety: standard versus parameterised versions. *International Journal of Sustainable Materials and Structural Systems*. 2018, vol. 3, no. 3–4, pp. 203–217.

6. Wang R., Wang X., Wang L., Chen X. Efficient computational method for the non-probabilistic reliability of linear structural systems. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2016, vol. 29, no. 3, pp. 284–299.

7. Tao J., Jian-Jun C., Ya-Lan X. A semi-analytic method for calculating non-probabilistic reliability index based on interval models. *Applied Mathematical Modelling*. 2007, vol. 31, no. 7, pp. 1362–1370.

8. Guo S.X., Lu Z.Z. A non-probabilistic robust reliability method for analysis and design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Applied Mathematical Modelling*. 2015, vol. 39, no. 7, pp. 1985–2002.

9. Kang Z., Luo Y. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009, vol. 198, no. 41–44, pp. 3228–3238.

10. Duncan J.M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical Engineering*. 2000, vol. 126, no. 4, pp. 307–316.

11. Уткин В.С., Уткин Л.В. Расчет надежности строительных конструкций при различных способах описания неполноты информации. Вологда: ВоГТУ. 2009. 126 с.

12. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1956, no. 27(3), pp. 642–669. DOI:10.1214/aoms/1177728174

13. Pradlwarter H.J., Schuëller G.I. The use of kernel densities and confidence intervals to cope with insufficient data in validation experiments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008, vol. 197, no. 29–32, pp. 2550–2560.

14. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Издательство «XYZ». 2022. 654 с.
15. Elishakoff I. Safety Factors and Reliability: Friends or Foes? Berlin: Springer Netherlands, 2004. 296 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-2131-2
16. Guo S.X. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis. *Chinese Journal of Computational Mechanics*. 2001, vol. 18, no. 1, pp. 56–60.
17. Wang X.J., Qiu Z.P., Elishakoff I. Non-probabilistic set-theoretic model for structural safety measure. *Acta Mechanica*. 2008, vol. 198, no. 1, pp. 51–64.
18. Соловьева А.А., Соловьев С.А. Метод оценки надежности элементов плоских ферм на основе p-блоков // *Вестник МГСУ*. 2021. Т. 16. Вып. 2. С. 153–167.
19. Карпов Д.Ф. Алгоритм комплексной диагностики технического состояния строительных конструкций по анализу термограмм // *Строительные материалы и изделия*. 2019. Т. 2. № 2. С. 23–28.
20. Jiang C., Ni B.Y., Han X., Tao Y.R. Non-probabilistic convex model process: a new method of time-variant uncertainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014, vol. 268, pp. 656–676.

**References**

1. Mkrtychev O.V., Shchedrin O.S., Lokhova E.M. Determination of individual coefficients on the basis of probabilistic analysis. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2022, vol. 17, no. 10, pp. 1331–1346. DOI:10.22227/1997-0935.2022.10.1331-1346 [In Russian].
2. Adishchev V.V., Shmakov D.S. Method of constructing the membership function with "direct" processing of initial data. *Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)*. 2013, vol. 16, no. 2, pp. 45–66. [In Russian].
3. Jiang C., Zheng J., Han X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with both aleatory and epistemic uncertainties: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2018, vol. 57, no. 6, pp. 2485–2502.
4. Ben-Haim Y., Elishakoff I. Convex models of uncertainty in applied mechanics. Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo: Elsevier, 1990. 240 p.
5. Elishakoff I., Daphnis A. Simple application of interval analyses to structural safety: standard versus parameterised versions. *International Journal of Sustainable Materials and Structural Systems*. 2018, vol. 3, no. 3–4, pp. 203–217.
6. Wang R., Wang X., Wang L., Chen X. Efficient computational method for the non-probabilistic reliability of linear structural systems. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2016, vol. 29, no. 3, pp. 284–299.
7. Tao J., Jian-Jun C., Ya-Lan X. A semi-analytic method for calculating non-probabilistic reliability index based on interval models. *Applied Mathematical Modelling*. 2007, vol. 31, no. 7, pp. 1362–1370.
8. Guo S.X., Lu Z.Z. A non-probabilistic robust reliability method for analysis and design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Applied Mathematical Modelling*. 2015, vol. 39, no. 7, pp. 1985–2002.
9. Kang Z., Luo Y. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009, vol. 198, no. 41–44, pp. 3228–3238.
10. Duncan J.M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical Engineering*. 2000, vol. 126, no. 4, pp. 307–316.
11. Utkin V.S., Utkin L.V. Raschet nadezhnosti stroitel'nyh konstrukcij pri razlichnyh sposobah opisaniya nepolnoty informacii [Structural reliability analysis with different approaches to describing the incompleteness of data]. Vologda: VoGTU, 2009. 126 p. (In Russian)

12. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1956, no. 27(3), pp. 642–669. DOI:10.1214/aoms/1177728174
13. Pradlwarter H.J., Schuëller G.I. The use of kernel densities and confidence intervals to cope with insufficient data in validation experiments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008, vol. 197, no. 29–32, pp. 2550–2560.
14. Sharyj S.P. Konechnomernyj interval'nyj analiz [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirsk: Izdatel'stvo XYZ, 2022. 654 p. [In Russian]
15. Elishakoff I. Safety Factors and Reliability: Friends or Foes? Berlin: Springer Netherlands, 2004. 296 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-2131-2
16. Guo S.X. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis. *Chinese Journal of Computational Mechanics*. 2001, vol. 18, no. 1, pp. 56–60.
17. Wang X.J., Qiu Z.P., Elishakoff I. Non-probabilistic set-theoretic model for structural safety measure. *Acta Mechanica*. 2008, vol. 198, no. 1, pp. 51–64.
18. Soloveva A.A., Solovev S.A. Reliability analysis of planar steel trusses based on p-box models. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2021, vol. 16, no. 2, pp. 153–167. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.2.153-167 [In Russian].
19. Karpov D.F. The algorithm of complex diagnostics of technical condition of building structures on thermograms analysis. Stroitel'nye materialy i izdeliya [*Construction Materials and Products*]. 2019, vol. 2, no. 2, pp. 23–28. DOI: 10.34031/2618-7183-2019-2-2-23-28 [In Russian)]
20. Jiang C., Ni B.Y., Han X., Tao Y.R. Non-probabilistic convex model process: a new method of time-variant uncertainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014, vol. 268, pp. 656–676.

**Данные об авторах / Information about authors**

**Соловьев Сергей Александрович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет (ВоГУ), Вологда, Россия
solovevsa@vogu35.ru
**Solovev Sergey A.**, Cand. Sci. (Engineering), associate professor of industrial and civil engineering department, Vologda State University, Russia
solovevsa@vogu35.ru

**Иньков Александр Эдуардович**, аспирант, преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет (ВоГУ), Вологда, Россия
inkovaie@vogu35.ru
**Inkov Alexander E.**, post-graduate student, lecturer of industrial and civil engineering department, Vologda State University, Russia
inkovaie@vogu35.ru

**Соловьева Анастасия Андреевна**, аспирант, преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет (ВоГУ), Вологда, Россия
solovevaaa@vogu35.ru
**Soloveva Anastasia A.**, post-graduate student, lecturer of industrial and civil engineering department, Vologda State University, Russia
solovevaaa@vogu35.ru