

# СЕЙСМОСТОЙКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО БЕЗОПАСНОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

ISSN 2618-9283

DOI 10.37153/2618-9283

EARTHQUAKE ENGINEERING. CONSTRUCTIONS SAFETY

02 2020

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL  
[www.seismocorstruction.ru](http://www.seismocorstruction.ru)



**«СЕЙСМОСТОЙКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО.  
БЕЗОПАСНОСТЬ СООРУЖЕНИЙ»**

**Главный редактор**

**Ведяков И. И.**, доктор технических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Заместитель главного редактора**

**Бубис А. А.** (Москва, Российская Федерация)

**Ученый секретарь редколлегии**

**Смирнова Л. Н.**, кандидат технических наук (Москва, Российская Федерация)

**Редакционная коллегия**

**Акулов Н.И.**, доктор геолого-минералогических наук (Иркутск, Российская Федерация)

**Алешин А.С.**, доктор физико-математических наук (Москва, Российская Федерация)

**Белаш Т.А.**, доктор технических наук, профессор (Санкт-Петербург, Российская Федерация)

**Бержинский Ю.А.**, кандидат геолого-минералогических наук (Иркутск, Российская Федерация)

**Вада Акира**, доктор, профессор (Токио, Япония)

**Вознесенский Е.А.**, доктор геолого-минералогических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Гусев Б.В.**, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН (Москва, Российская Федерация)

**Захаров В.С.**, доктор геолого-минералогических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Ильичев В.А.**, доктор технических наук, профессор, Академик РААСН (Москва, Российская Федерация)

**Клементе Паоло**, доктор, профессор (Рим, Италия)

**Лапин В.А.**, кандидат технических наук, профессор (Алматы, Республика Казахстан)

**Немчинов Ю.И.**, доктор технических наук, профессор (Киев, Республика Украина)

**Павленко О.В.**, доктор физико-математических наук, (Москва, Российская Федерация)

**Римшин В.И.** доктор технических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Севостьянов В.В.**, кандидат геолого-минералогических наук (Москва, Российская Федерация)

**Семенов В.А.**, доктор технических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Тонких Г.П.**, доктор технических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Тяпин А.Г.**, доктор технических наук (Москва, Российская Федерация)

**Уздин А.М.**, доктор технических наук, профессор (Санкт-Петербург, Российская Федерация)

**Хакимов Ш.А.**, кандидат технических наук, профессор (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Хачиян Э.Е.**, доктор технических наук, профессор (Ереван, Республика Армения)

**Чевереv В.Г.**, доктор геолого-минералогических наук, профессор (Москва, Российская Федерация)

**Эмри И.**, доктор, профессор (Любляна, Республика Словения)

**«EARTHQUAKE ENGINEERING.  
CONSTRUCTIONS SAFETY»**

**Editor-in-Chief**

**Vedyakov I.I.**, DSc, Professor, (Moscow, Russian Federation)

**Deputy editor-in-Chief**

**Bubis A.A.**, (Moscow, Russian Federation)

**Academic Secretary**

**Smirnova L.N.**, PhD (Moscow, Russian Federation)

**Editorial board**

**Akulov N.I.**, DSc in Geology, Professor (Irkutsk, Russian Federation)

**Aleshin A.S.**, DSc in Mathematics and Physics, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Belash T.A.**, DSc, Professor (Saint-Petersburg, Russian Federation)

**Berzhinskii Yu.A.**, PhD in Geology, Professor (Irkutsk, Russian Federation)

**Wada Akira**, PhD, Professor Emeritus (Tokyo, Japan)

**Voznesenskii E.A.**, DSc in Geology, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Gusev B.V.**, DSc, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

**Zakharov V.S.**, DSc in Geology, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Il'ichev V.A.**, DSc, Professor, Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (Moscow, Russian Federation)

**Clemente Paolo**, PhD, Professor (Rome, Italy)

**Lapin V.A.**, PhD, Professor (Almaty, Republic of Kazakhstan)

**Nemchinov Yu.I.**, DSc, Professor (Kiev, Ukraine)

**Pavlenko O.V.**, DSc in Mathematics and Physics (Moscow, Russian Federation)

**Rimshin V.I.**, DSc, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Sevost'yanov V.V.**, PhD in Geology, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Seменов V.A.**, DSc, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Tonkikh G.P.**, DSc, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Tyapin A.G.**, DSc (Moscow, Russian Federation)

**Uzdin A.M.**, DSc, Professor (Saint-Petersburg, Russian Federation)

**Khakimov Sh.**, PhD, Professor (Tashkent, Republic of Uzbekistan)

**Khachiyani E.E.**, DSc, Professor (Yerevan, Republic of Armenia)

**Cheverev V.G.**, DSc in Geology, Professor (Moscow, Russian Federation)

**Emri Igor**, PhD, Professor (Ljubljana, Republic of Slovenia)

# Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. Earthquake Engineering. Constructions Safety.

## СОДЕРЖАНИЕ

№ 2 – 2020

## CONTENTS

№ 2 – 2020

- Исраилов М.Ш., Смирнова Л.Н.** 3 **Israilov M. Sh., Smirnova L.N.**  
Вычисление скоростей  
распространения волн в сегментных  
трубопроводах с демпфирующими  
стыками  
Calculation of Wave Velocities in  
Segmented Pipelines with Flexible Joints
- Тяпин А.Г.** 18 **Tyapin A.G.** Free Vibrations of Rigid  
Свободные колебания жесткой кинематической опоры Ю.Д.  
Черепинского  
Kinematic Support of Yu.D. Cherepinsky
- Ведяков И.И., Востров В.К.** 32 **Vedyakov I. I., Vostrov V. K.**  
Развитие моделей колебаний основания и  
нормативных подходов к расчетам  
ответственных сооружений на  
сейсмические воздействия  
Development of the Base Oscillation  
Models and Regulatory Approaches to the  
Calculation of Critical Structures for  
Seismic Impacts
- Абдрахимов В.З., Абдрахимова Е.С.** 55 **Abdrakhimov V. Z., Abdrakhimova E.S.**  
Использование алюмосодержащего  
нанотехногенного сырья нефтехимии  
для получения высокопрочного  
кирпича  
The Use of Nanotechnology Aluminium-  
containing Raw Materials in the  
Petrochemical Industry to Produce High-  
performance Brick
- Гасанова Т.Д., Тагиева С.А.** 67 **Hasanova T. J., Tagiyeva S. A.** Research  
Исследование устойчивости и  
сейсмостойкости неоднородных  
двухслойных стержней в упругой среде  
of Stability and Seismic Resistance of Non-  
Uniform Two-Layer Rods in Elastic  
Medium
- Об авторах** 76 **About authors**

12+  
ISSN 2618-9283  
(c) РАСС, 2020



УДК 539.3; 534.1

## **Вычисление скоростей распространения волн в сегментных трубопроводах с демпфирующими стыками**

Исраилов М.Ш.

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Комплексного научно-исследовательского института (КНИИ) РАН

Грозный, Российская Федерация

Смирнова Л.Н.

кандидат технических наук, ученый секретарь, доцент кафедры «Строительные сооружения, конструкции и материалы», АО «НИЦ «Строительство»

Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Представлены инженерные способы нахождения средних (усреднённых) скоростей распространения продольных волн в трубопроводах с демпфирующими стыками. Путем строгого анализа колебаний одномерной периодически неоднородной структуры показано, что результаты инженерных подходов для стержневой скорости являются первым или длинноволновым асимптотическим приближением, справедливым, когда период внешнего воздействия (длина сейсмической волны) значительно превышает размер ячейки периодичности трубопровода (длину трубы со стыком). Тем самым устанавливается, что при выполнении указанного условия сложная задача динамики трубопровода со стыками сводится к существенно более простой задаче о колебаниях однородного трубопровода, скорость распространения волн в котором равна найденному среднему значению.

Приведённые численные примеры демонстрируют значительное (иногда на порядок) гашение стержневой скорости при наличии демпфирующих стыков.

**Ключевые слова:** трубопровод, демпфирующие стыки, продольные волны, неоднородные структуры, усредненная стержневая скорость

## Calculation of Wave Velocities in Segmented Pipelines with Flexible Joints

Israilov M. Sh., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Scientific Officer. et al. Complex Research Institute (CRI) of the Russian Academy of Sciences

Grozny, Russian Federation

Smirnova L. N.

PhD, Scientific Secretary, Associate Professor of the Department «Construction structures, facilities and materials» of JSC Research Center of Construction

Moscow, Russian Federation

ORCID ID 0000-0002-0467-0912

**Abstract.** Engineering methods for finding the average (averaged) velocity of propagation of longitudinal waves in pipelines with flexible joints are presented. By accurate analysis of the problem of oscillations of a one dimensional periodically inhomogeneous structure it is shown that the results of engineering approaches for rod velocity are the first or long-wave asymptotic approximation which valid when the period of external influence (the length of the seismic wave) significantly exceeds the size of the periodicity cell of the pipeline (the length of the pipe with a joint). Thus, it is established that when this condition is met, the problem of pipeline dynamics with joints is reduced to a much simpler problem of vibrations of a homogeneous pipeline, the velocity of wave propagation in which is equal to the found average value.

Numerical examples are given that demonstrate a significant (sometimes by an order of magnitude) decreasing of the rod velocity in the presence of flexible joints.

**Keywords:** pipeline, flexible joints, longitudinal waves, inhomogeneous structures, averaged rod velocity

**DOI:** [10.37153/2618-9283-2020-2-3-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-3-17)

**Введение.** В случае однородного трубопровода, рассматриваемого как стержень, скорость распространения продольных волн в нём является единственным параметром, входящим в уравнение движения (волновое уравнение). В динамических задачах напряженно-деформированное

состояние трубопровода зависит от его механических и инерционных свойств, выражающихся через эту скорость.

В случае, когда трубопровод расположен во внешней среде (грунте), на его напряженно-деформированное состояние оказывают влияние также и механические свойства грунта, в частности, скорость распространения сейсмических волн. При этом, когда мы имеем дело, скажем, с металлическим (стальным, чугунным) или бетонным трубопроводом, обычной является ситуация, при которой скорость распространения продольных волн в нем значительно, как правило, на порядок превышает наибольшую скорость распространения волн в грунте, а именно, скорость распространения объемных волн, если грунт считается упругим. Поэтому, когда продольная сейсмическая волна движется вдоль прямолинейного трубопровода, или когда ее фронт (плоскость одинаковой фазы в случае стационарной волны) образует с осью трубопровода угол близкий к прямому углу, возникает дозвуковой режим обтекания, при котором волна в трубе опережает сейсмическую волну в грунте.

Зачастую отсеки трубопровода для придания большей гибкости на изгиб и/или кручение соединяют на стыках сложными демпфирующими узлами, содержащими элементы из резины или мягкого металла. Решение динамической задачи для такой неоднородной структуры, пусть даже и периодической, является сложной задачей. В данной работе показано, что задача о колебаниях такой структуры (трубопровода с демпфирующими стыками) сводится в первом (линейном) приближении к задаче о колебаниях однородного трубопровода со средней (или усредненной) скоростью распространения продольных волн. В таком существенном упрощении задачи состоит смысл и принципиальная значимость нахождения стержневой скорости распространения волн в неоднородных или сегментных трубопроводах со сложными стыками.

Другим важным результатом работы является установление того факта, что в сегментном трубопроводе с периодической системой демпфирующих стыков стержневая скорость волн гасится на стыках, и что она в зависимости от свойств демпфирующего материала может быть значительно (иногда на порядок) меньше скорости распространения звука в металлических отсеках трубопровода. Более того, она может оказаться меньше, чем скорость сейсмической волны, распространяющейся вдоль трубопровода. Такая ситуация, в отличие от описанной выше для однородного трубопровода, приводит к сверхзвуковому обтеканию, и она требует новой постановки задачи о сейсмическом воздействии [1].

# 1. Вычисление скорости распространения продольных волн в сегментном трубопроводе: демпфирующие стыки, испытывающие сжатие-растяжение

1.1. *Инженерный подход.* Возможные варианты конструктивного решения для стыков трубопровода с демпфирующей частью, работающей на сжатие-растяжение, приведены, например, в работе [2] или гл. 12 монографии [3]. При этом демпфирующая часть стыков может состоять из одного или нескольких колец из демпфирующего материала (или мягкого металла).

Вычислим удлинение звена трубопровода длины  $L$ , состоящего из прямолинейного участка трубы длиной  $l_1$  с площадью поперечного сечения  $F_1$  и демпфирующей части стыка общей длины  $l_2$  с площадью поперечного сечения  $F_2$ . При этом "недемпфирующая" часть стыка длиной  $l_0-l_2$  отнесена к участку трубы длиной  $l_1$ , что несколько изменит ее линейную плотность и площадь поперечного сечения, однако этими изменениями будем пренебрегать (в случаях, когда стык обладает массой сравнимой с массой трубы, эти изменения могут быть учтены). Тогда, если обозначить через  $\langle \varepsilon \rangle$  среднюю деформацию звена, то очевидно, что

$$\langle \varepsilon \rangle \cdot L = \frac{\sigma_1}{E_1} l_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} l_2 = \frac{N}{F_1 E_1} l_1 + \frac{N}{F_2 E_2} l_2. \quad (1)$$

В формуле (1)  $E_1$  и  $E_2$  – модули Юнга материалов трубы и демпфирующего элемента, соответственно. При написании равенства (1) использовано условие равновесия части трубопровода, содержащего демпфирующий элемент, а именно, тот факт, что сила  $N = F_1 \sigma_1$ , действующая в поперечном сечении трубы, уравнивается силой  $F_2 \sigma_2$ , возникающей в сечении демпфирующего элемента.

Полагая теперь в (1)  $\langle \varepsilon \rangle = N / \langle E \rangle$ , разделим обе части этого равенства на произведение  $N \cdot L$  и, вводя понятия жесткостей при продольной деформации звена ( $B = F_1 \langle E \rangle$ ), трубы ( $B_1 = F_1 E_1$ ) и демпфирующего элемента ( $B_2 = F_2 E_2$ ), получаем

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B_1} \frac{l_1}{L} + \frac{1}{B_2} \frac{l_2}{L}, \quad B = \frac{L}{l_1/B_1 + l_2/B_2} = \frac{L F_1}{l_1/E_1 + (l_2/E_2)(F_2/F_1)} = \langle E \rangle F_1. \quad (2)$$

Легко определяется средняя или усредненная линейная плотность  $\langle \rho \rangle$  трубы со стыком. Пусть  $\rho_1$  есть линейная плотность трубы, а  $\rho_2$  – линейная плотность части стыка, содержащей демпфирующий элемент, тогда

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2 F_2 / F_1}{L}. \quad (3)$$

Можно предполагать, что скорость распространения продольных возмущений в таком звене (трубы со стыком) или в трубопроводе, состоящем из набора таких звеньев, определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{B}{\langle \rho \rangle F_1}} . \quad (4)$$

Очевидно, что при  $l_1/L \approx 1$  (или  $l_2 \ll L$ ), в силу определений (2) и (3), выполнено неравенство  $c < c_1$ , где  $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1} = \sqrt{B_1/(\rho_1 F_1)}$ . Таким образом, при наличии демпфирующих стыков стержневая скорость трубопровода (4) уменьшается.

1.2. *Строгий вывод скорости распространения продольных волн в сегментном трубопроводе.* Полученная в п. 1.1 на основании инженерных рассуждений формула (4) для скорости распространения продольных волн в неоднородном трубопроводе может быть подтверждена путем точного исследования по методу Е.А. Ильюшиной [4 – 6] (более подробно представленным в книге [7]). Для этого рассмотрим бесконечный двухкомпонентный трубопровод, состоящий из периодически повторяющихся однородных участков двух типов с границами раздела  $z = z_r$  ( $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тогда два соседних участка разных типов, например,  $r$ -ый участок ( $z_r \leq z \leq z_{r+1}$ ) длины  $l_1 = z_{r+1} - z_r$  и  $r+1$ -ый ( $z_{r+1} \leq z \leq z_{r+2}$ ) длины  $l_2 = z_{r+2} - z_{r+1}$  образуют звено или ячейку периодичности трубопровода (длина ячейки  $L = l_1 + l_2$ ).

Изучим стационарные колебания такого трубопровода, считая его продольные перемещения гармоническими функциями времени:  $u(z, t) = U(z)e^{-i\omega t}$ . При этом перемещение  $r$ -го участка  $U_r(z)$  определяется из уравнения

$$U_r''(z) + \omega_{1r}^2 U_r(z) = 0 \quad U_r''(z) + \omega_r^2 U_r(z) = 0, \quad (5)$$

в котором штрих означает производную по аргументу и  $\omega_r = \omega/c_r$ , где  $c_r = E_r/\rho_r$ ,  $\omega_{1r} = \frac{\omega}{c_r}$  есть скорость распространения продольных волн в  $r$ -ом участке трубы с модулем Юнга  $E_r$  и плотностью  $\rho_r$ .

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$U_r(z) = A_1^r \cos \omega_r z + A_2^r \sin \omega_r z . \quad (6)$$

Следуя методу Е.А. Ильюшиной [4], найдем связь между перемещениями  $U$  и напряжениями  $\Sigma_{11}$  ( $\sigma_{11}(z, t) = \Sigma_{11}(z)e^{-i\omega t}$ ) на левой границе  $r$ -го участка трубопровода ( $z = z_r$ ) с их значениями на правой границе ( $z = z_{r+1}$ ). С этой целью введем двумерный вектор  $Y^r$ :



$$Y_1^r = U_r(z), \quad Y_2^r = \frac{1}{E_0 \omega_0} \Sigma_{11}^r = \frac{E_r}{E_0 \omega_0} U_r'(z), \quad (7)$$

где  $E_0 \omega_0 = E_0 \omega / c_0$  – нормировочная константа (приводящая размерность второй компоненты вектора  $Y_2^r$  к размерности первой компоненты  $Y_1^r$ , т.е. к метру).

Пользуясь выражениями (6) и (7), можно константы в решении (6) выразить через компоненты вектора  $Y^r$ . Имеем в матричной форме

$$A^r = C^r Y^r; \quad C^r \equiv \begin{vmatrix} \cos \omega_r z & -P_r \sin \omega_r z \\ \sin \omega_r z & P_r \cos \omega_r z \end{vmatrix}, \quad P_r \equiv \frac{E_0 \omega_0}{E_r \omega_r}. \quad (8)$$

Записывая соотношения (6) – (8) для  $r$ -го и  $r+1$ -го участков и учитывая условия непрерывности перемещения  $U$  и напряжения  $\Sigma_{11}$  на общей границе между этими участками, получаем зависимость между векторами  $Y$  на концах этого отрезка в матричной форме ( $l_r \equiv z_{r+1} - z_r$ )

$$Y^{r+1}(z_{r+1}) = D^r Y^r(z_r); \quad D^r \equiv \begin{vmatrix} \cos \omega_r l_r & P_r \sin \omega_r l_r \\ -\frac{1}{P_r} \sin \omega_r l_r & \cos \omega_r l_r \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Рекуррентные соотношения (9) позволяют находить значения перемещений и напряжений на любой границе раздела трубопровода, если известны их значения на одной из границ. Пользуясь этими соотношениями можно значения вектора  $Y$  на одном (скажем, правом) конце ячейки периодичности двухкомпонентного трубопровода выразить через его значения на другом (левом) конце ячейки. Для этого учтем, что  $r$ -ый участок имеет константы  $E_r = E_1$ ,  $\omega_r = \omega_1$  и длину  $l_r = l_1$ , а  $r+1$ -ый участок длину  $l_{r+1} = l_2$ , а его константы примем за нормировочные:  $E_{r+1} = E_2 \equiv E_0$ ,  $\omega_{r+1} = \omega_2 \equiv \omega_0$ . Тогда, записывая соотношения (9) для двух (соседних) участков, входящих в ячейку периодичности, найдем

$$Y^{r+2} = D Y^r, \quad D = D^2 D^1 \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где

$$d_{11} = \cos \omega_1 l_1 \cos \omega_2 l_2 - P_1^{-1} \sin \omega_1 l_1 \sin \omega_2 l_2, \quad d_{21} = -\cos \omega_1 l_1 \sin \omega_2 l_2 - P_1^{-1} \sin \omega_1 l_1 \cos \omega_2 l_2, \\ d_{12} = P_1 \sin \omega_1 l_1 \cos \omega_2 l_2 + \cos \omega_1 l_1 \sin \omega_2 l_2, \quad d_{22} = -P_1 \sin \omega_1 l_1 \sin \omega_2 l_2 + \cos \omega_1 l_1 \cos \omega_2 l_2.$$

Здесь при вычислении матрицы  $D$  учтено, что в  $D^2$ , определенной формулой (9),  $P_2 = 1$  в силу принятых обозначений.

В рассматриваемом двухкомпонентном периодическом трубопроводе существует два типа границ раздела: границы  $I$ -го типа

( $r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ), справа от которых находятся однородные участки, длиной  $l_1$  и  $II$ -го типа ( $r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ), справа от которых находятся однородные участки длиной  $l_2$ .

Естественно предположить, что все границы раздела колеблются с одинаковой частотой, однако границы каждого типа со своей амплитудой (это предположение для внешних воздействий малой частоты, таких как сейсмические волны, обосновано в [6], где показано, что аperiодические движения неоднородной структуры возможны только при высокочастотных внешних воздействиях). Тогда, записывая уравнения (10) для первой группы границ раздела, получаем

$$\begin{aligned} Y_1^I e^{ikl} &= Y_1^I d_{11} + Y_2^I d_{12}, \\ Y_2^I e^{ikl} &= Y_1^I d_{21} + Y_2^I d_{22}. \end{aligned}$$

Условие существования нетривиального решения этой системы для амплитуд  $Y_1^I$ ,  $Y_2^I$  (амплитуд перемещений и напряжений первой группы границ раздела) приводит к следующему характеристическому (или спектральному) уравнению

$$\cos kL = \cos(\omega_1 l_1 + \omega_2 l_2) - \gamma \sin \omega_1 l_1 \sin \omega_2 l_2, \quad \gamma \equiv (1 - P_1)^2 / (2P_1). \quad (11)$$

К тому же уравнению (11) сводится и условие существования нетривиального решения для амплитуд колебаний второй группы границ раздела.

Поскольку длина сейсмической волны  $\lambda = 2\pi/k$  (от многих десятков до нескольких сотен метров) значительно больше длины ячейки периодичности  $L = l_1 + l_2$  (как правило, порядка 5 - 7 метров в наземных трубопроводах большого диаметра), то для спектрального уравнения (11) хорошим приближением является длинноволновое или линейное приближение, когда в нем при малых  $k$  и  $\omega_1 = \omega/c_1$ ,  $\omega_2 = \omega/c_2$  в разложениях функций в ряды Тейлора удерживаются члены до второго порядка малости. Тогда это уравнение переходит в уравнение

$$k^2 L^2 = \omega^2 \left[ \frac{l_1^2}{c_1^2} + \frac{l_2^2}{c_2^2} + 2(1 + \gamma) \frac{l_1 l_2}{c_1 c_2} \right],$$

из которого определяется средняя (или усредненная) скорость распространения продольных волн в двухкомпонентном трубопроводе или стержне, при малых  $k$  и  $\omega$ , в виде

$$c \equiv \langle c \rangle = L \left[ \frac{l_1^2}{c_1^2} + \frac{l_2^2}{c_2^2} + \frac{l_1 l_2}{c_1 c_2} \frac{E_1 \rho_1 + E_2 \rho_2}{\sqrt{E_1 E_2 \rho_1 \rho_2}} \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Полученное выражение (12) позволяет установить для средней скорости следующие важные результаты.

**Утверждение 1.** *Средняя скорость распространения продольных волн в сегментном трубопроводе может быть вычислена исходя из его эффективных статических характеристик, рассматривая трубопровод как композит [8], а именно*

$$c \equiv \langle c \rangle = \sqrt{\langle E \rangle / \langle \rho \rangle}, \quad (13)$$

где

$$\langle \rho \rangle = \frac{l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2}{L}, \quad \langle E \rangle = \frac{L}{l_1/E_1 + l_2/E_2} \quad (14)$$

есть соответственно средняя плотность и эффективный модуль Юнга двухкомпонентного стержня.

Выражение для средней плотности в (14), в котором  $F_1$  и  $F_2$  обозначают площади поперечных сечений стержней  $l_1$  и  $l_2$ , соответственно, является очевидным. А выражение для эффективного модуля Юнга получается, вводя понятие средней деформации ячейки периодичности по формуле ( $\sigma$  – продольное напряжение)

$$\langle \varepsilon \rangle L = \frac{\sigma}{\langle E \rangle} L = \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = \frac{\sigma}{E_1} l_1 + \frac{\sigma}{E_2} l_2.$$

Для установления утверждения 1 преобразуем правую часть (13), используя (14). Имеем

$$\sqrt{\frac{\langle E \rangle}{\langle \rho \rangle}} = \sqrt{\frac{L}{l_1/E_1 + l_2/E_2} \cdot \frac{L}{l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2}} = L / \sqrt{\frac{l_1^2}{c_1^2} + \frac{l_2^2}{c_2^2} + l_1 l_2 \left( \frac{\rho_1}{E_2} + \frac{\rho_2}{E_1} \right)}.$$

Откуда и получаем искомый результат, если учесть, что

$$\frac{\rho_1}{E_2} + \frac{\rho_2}{E_1} = \frac{\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2}{E_1 E_2} = \frac{1}{c_1 c_2} \frac{\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2}{\sqrt{E_1 E_2} \rho_1 \rho_2}.$$

**Утверждение 2.** *Средняя скорость распространения продольных волн в двухкомпонентном трубопроводе меньше большей из скоростей стержневых волн на участках его ячейки периодичности.*

Без ограничения общности предположим, что  $c_1 > c_2$ . Тогда

$$\langle c \rangle = L / \sqrt{\frac{l_1^2}{c_1^2} + \frac{l_2^2}{c_2^2} + \frac{l_1 l_2}{c_1 c_2} \frac{(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\sqrt{E_1 E_2} \rho_1 \rho_2}} = L / \sqrt{\left( \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} \right)^2 + \frac{l_1 l_2}{c_1 c_2} \frac{(\sqrt{E_1} \rho_1 - \sqrt{E_2} \rho_2)^2}{\sqrt{E_1 E_2} \rho_1 \rho_2}} <$$

$$\frac{L}{l_1/c_1 + l_2/c_2} = \frac{c_1 c_2}{(l_1/L)c_2 + (l_2/L)c_1} = c_1 \frac{1}{(l_1/L) + (l_2/L) \cdot (c_1/c_2)} = c_1 \frac{1}{1 + (l_2/L) \cdot (c_1/c_2 - 1)} < c_1.$$

**Замечание.** Проведенное в настоящем разделе исследование, а значит, и результаты утверждений 1 и 2 относятся к случаю, когда площади поперечных сечений участков  $l_1$  и  $l_2$  одинаковы (и равны, скажем  $F_1$ ). Только в этом случае средние значения  $\langle \rho \rangle$  и  $\langle E \rangle$  определены формулами (14). Общий случай  $F_2 \neq F_1$  сводится к рассмотренному (т.е. и второй участок  $l_2$  может рассматриваться как имеющий площадь поперечного сечения  $F_1$ ), если принять  $\rho'_2 = \rho_2 F_2/F_1$  и  $E'_2 = E_2 F_2/F_1$ . Тогда формулы (2) и (3) для средних значений  $\langle E \rangle$  и  $\langle \rho \rangle$  общего случая совпадают с (14).

С учетом необходимых поправок, вытекающих из приведённого замечания, легко проверить, что строгий результат (12) для стержневой скорости совпадает со значением (4), полученным ранее из инженерных соображений.

**2. Случай демпфирующих стыков, испытывающих сдвиг.** Обратимся к вопросу о том, как изменится скорость распространения продольных волн в трубопроводе при наличии периодической системы демпфирующих стыков, работающих на сдвиг. Разъяснения по этому вопросу, приведённые в работе [1] и в книге [9] недостаточны, а полученная формула для стержневой скорости (формула (П.6.3) в [9]) неверна.

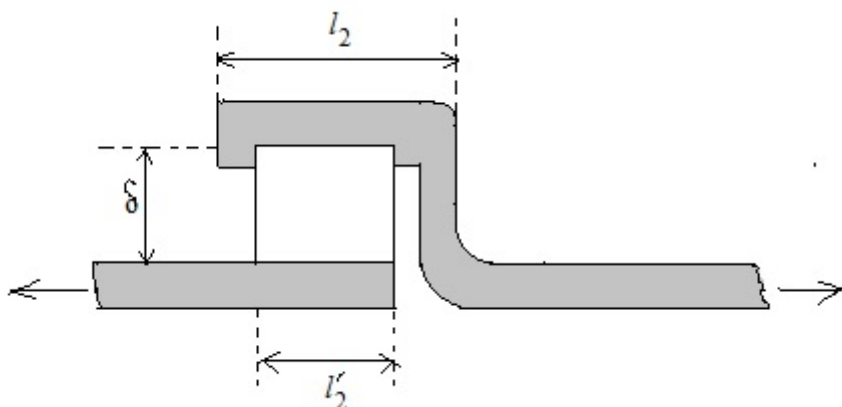
Покажем, как может быть получен правильный результат. Упрощенной моделью упомянутого стыка является раструбное соединение труб, когда одна из соединяемых труб имеет в конце расширение (раструб) длиной  $l_2$  (при общей длине труб  $L \equiv l_1 + l_2$ ,  $l_2 \ll L$ ) и образующийся зазор для случая, когда ровный конец второй трубы вставлен в раструб, равен  $\delta$  (Рис. 1). В этот зазор вплавлен или в нем плотно закреплен цилиндр (длины  $l'_2 < l_2$ ) из мягкого металла, резины или другого демпфирующего материала. Таким образом, при продольном движении соединенных труб относительно друг друга в цилиндрическом слое демпфирующего материала имеют место сдвиговые деформации.

Вычислим удлинение описанного звена трубопровода длины  $L$ , состоящего из прямолинейного участка трубы длиной  $l_1$  и стыка длиной  $l_2$ . Если обозначить через  $\langle \varepsilon \rangle$  среднюю деформацию звена, то очевидно, что

$$\langle \varepsilon \rangle \cdot L = \frac{\sigma_1}{E_1} l_1 + \frac{\tau}{G_2} \delta = \frac{N}{F_1 E_1} l_1 + \frac{N}{\pi \tilde{D} l'_2 G_2} \delta. \quad (15)$$

В формуле (15)  $F_1$  – площадь поперечного сечения трубы диаметра  $D$ ,  $E_1$  и  $G_2$  – модуль Юнга и модуль сдвига материалов, соответственно, трубы и демпфера (индексы подчеркивают, что это упругие константы разных

материалов) и внутренний диаметр раструба  $\tilde{D} = D + 2\delta = D(1 + 2\delta/D) \approx D$ ;



**Рисунок 1** – Схематическое изображение демпфирующего стыка, работающего на сдвиг

**Figure 1** – Schematic image of a damping joint working on a shift

последнее приближенное равенство может быть принято, если  $\delta/D \ll 1$ . Наконец, при написании равенства (15) использовано условие равновесия элемента трубопровода, содержащего стык, а именно, тот факт, что сила  $N = F_1\sigma_1$ , действующая в поперечном сечении трубы, уравнивается суммарными касательными напряжениями  $\pi\tilde{D}l'_2\tau$ , возникающими на внешней боковой поверхности демпфирующего цилиндрика.

Полагая теперь в (15)  $\langle \varepsilon \rangle = N/\langle E \rangle$  и разделив обе части этого равенства на  $N$  и  $L$ , получаем из (15) соотношение между жесткостями при продольной деформации звена (трубы со стыком)  $B = F_1\langle E \rangle$  и трубы  $B_1 = F_1E_1$  в виде

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B_1} \frac{l_1}{L} + \frac{\delta}{\pi\tilde{D}l'_2G_2L}, \quad B = \frac{B_1}{l_1/L + B_1 \cdot \delta/(\pi\tilde{D}l'_2G_2L)}. \quad (16)$$

При  $l'_2/L \ll 1$  и  $\delta/D \ll 1$  (тогда  $l_1/L \approx 1$  и  $\tilde{D} \approx D$ ) формула (16) для  $\langle B \rangle$  совпадает с приведённой в [6].

Легко определяется средняя или усредненная линейная плотность  $\langle \rho \rangle$  трубы со стыком. Если  $\rho_1$  есть линейная плотность трубы,  $\rho'$  – линейная плотность материала демпфирующего цилиндра, то в соответствии с формулой в (3) при  $\delta/D \ll 1$  имеем  $F_2 \approx F_1$  и линейная плотность стыка  $\rho_2 \approx 2\rho_1 + \rho'$ . Поэтому

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2 F_2/F_1}{L} \approx \rho_1 + (\rho_1 + \rho') \frac{l_2}{L} > \rho_1. \quad (17)$$

Можно предполагать, что скорость распространения продольных возмущений в звене (трубы с раструбным стыком) или в трубопроводе, состоящем из набора таких звеньев, определяется формулой



$$c = \sqrt{\frac{B}{\langle \rho \rangle F_1}}. \quad (18)$$

Очевидно, что при  $l_1/L \approx 1$ , в силу определений (16) и (17), выполнено неравенство  $c < c_1$ , где  $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1} = \sqrt{B_1/(\rho_1 F_1)}$ ; таким образом, при наличии демпфирующих стыков стержневая скорость трубопровода уменьшается.

Изложенные выше рассуждения не являются строгим выводом формулы (18). Для строгого ее вывода, как и в п. 1, воспользуемся методом Е.А. Ильюшиной. С этой целью, прежде всего, заменим стык на стержень площади поперечного сечения  $F_1$ , длины  $l_2$  и линейной плотности  $\rho_2$ , обладающим тем свойством, что при приложении любой силы  $N$  на торце он удлиняется на величину, равную второму слагаемому в формуле (15), т.е. на величину, равную удлинению звена трубопровода за счет сдвига на стыке. Сказанное будет иметь место, если модуль Юнга "эквивалентного" стержня принимает значение

$$E_2 = \frac{\pi \tilde{D} l_2' l_2}{F \delta} G_2.$$

Пусть теперь неоднородный трубопровод получен периодическим повторением звена (ячейки периодичности), состоящей из двух компонент: стержня длины  $l_1$  с характеристиками  $(\rho_1, E_1)$  и стержня длины  $l_2$  с характеристиками  $(\rho_2, E_2)$ . В этом случае, согласно формулам (12), (13), в длинноволновом приближении, когда длины волн значительно превышают размер  $L$  ячейки периодичности (что, как отмечено в п. 1, имеет место при сейсмических колебаниях), скорость распространения продольных возмущений в двухкомпонентном стержне дается выражением

$$c = L \left[ \left( \frac{l_1}{c_1} \right)^2 + \left( \frac{l_2}{c_2} \right)^2 + \frac{l_1 l_2}{c_1 c_2} \frac{E_1 \rho_2 + E_2 \rho_1}{\sqrt{E_1 E_2 \rho_1 \rho_2}} \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\langle E \rangle}{\langle \rho \rangle}}, \quad (19)$$

где  $c_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}$ , а  $\langle \rho \rangle$  и  $\langle E \rangle$  определены формулами (14).

Легко проверить, что строгий результат (19) для стержневой скорости, если в нем заменить  $\rho_2$  на  $\rho_2' = \rho_2 F_2/F_1$  (в соответствии с замечанием, приведенным в п. 2), совпадает со значением (18), полученным ранее из инженерных соображений.

**3. Численные примеры.** Чтобы количественно оценить эффект демпфирующей прокладки на стыках рассмотрим два примера металлических трубопроводов большого диаметра (алюминиевого и стального), имеющие сложные стыки с резиновыми элементами. Механические характеристики металлов и резины, необходимые (согласно

изложенным выше результатам) для вычисления скоростей распространения продольных волн в таких неоднородных структурах взяты из монографии Г. Кольского [10]; эти данные, пересчитанные в систему единиц СИ, приведены в Таблице 1 (выбор источника продиктован отсутствием полных данных по резине в распространенных справочниках, например, Д. Кэя и Т. Лэби).

3.1. В качестве первого примера рассмотрим (надземный) трубопровод из алюминиевых труб (любого диаметра) длиной 3 м, из которых 0,03 м составляет общую ширину одной или нескольких резиновых прокладок (колец) на стыках, соединяющих эти трубы. Таким образом, в данном примере  $l_1 = 2,87$  м и  $l_2 = 0,03$  м. Примем, для определенности, площади поперечных сечений трубы и резиновых колец одинаковыми:  $F_1 = F_2$ . Тогда, используя значения механических характеристик для алюминия и резины, приведенные в Таблице 1, получаем из формул (2) – (4) или (13), (14), что скорость распространения продольных волн в таком трубопроводе  $c = \langle c \rangle \approx 115$  м/с. Как видно, из сравнения с данными Таблицы 1, эта скорость существенно (на порядок) меньше, чем стержневая скорость в однородном алюминиевом трубопроводе.

3.2. Рассмотрим трубопровод, состоящий из стальных труб длиной  $L = 5$  м и имеющий раструбное соединение на стыках с демпфирующими резиновыми прокладками шириной  $l'_2 = 0,05$  м. Примем приближенно, что  $l_2 \approx l'_2$ , тогда  $l_1 = 4,95$  м. Пусть диаметры труб  $D = 0,6$  м, а толщина их стенок составляет 0,01 м. Для зазора в раструбных соединениях, а значит и для толщины резинового демпфирующего цилиндра, работающего на сдвиг, примем два значения: а)  $\delta = 0,01$  м и б)  $\delta = 0,005$  м; в этих случаях  $\tilde{D} \approx D$ . Вычисленные по формулам (16) – (18) или по формуле (19) с использованием данных Таблицы 1, значения стержневых скоростей трубопровода равны: а)  $c = \langle c \rangle \approx 721$  м/с и б)  $c = \langle c \rangle \approx 1000$  м/с. Как видно, эти скорости значительно отличаются от скорости распространения продольных волн в однородной стальной трубе.

**Таблица 1** – Упругие константы материалов, использованные в расчётах  
**Table 1** – Elastic constants of the materials used in the calculations

Материал	Плотность $\rho \times 10^3$ (кг/м <sup>3</sup> )	Модуль Юнга $E$ (Па)	Модуль сдвига $G$ (Па)	Стержневая скорость звука $c$ (м/с)
Алюминий	2,70	$7,0 \times 10^{10}$	$2,6 \times 10^{10}$	5090
Сталь	7,80	$21,1 \times 10^{10}$	$8,1 \times 10^{10}$	5190
Резина	0,93	$2,0 \times 10^6$	$0,7 \times 10^6$	46

#### 4. Результаты и выводы

1. Описаны инженерные методы получения средних (или усредненных) скоростей распространения продольных волн в периодически

неоднородных трубопроводах при наличии сложных стыков с демпфирующими элементами. Предлагаемый анализ устраняет существующие в некоторых источниках неверные результаты для средней скорости.

2. Дан строгий вывод стержневой скорости на основе точного исследования колебаний одномерной периодически неоднородной структуры. Путем разложения спектрального уравнения такой структуры в ряд при малых размерах ячейки периодичности трубопровода в сравнении с длиной сейсмической волны, показано, что точные значения стержневой скорости в этом приближении совпадают с результатами инженерных подходов.

3. Выявлено значительное (как правило, на порядок) понижение скорости распространения волн в трубопроводе с периодической системой демпфирующих стыков. Это обстоятельство не только может приводить к количественным изменениям в конкретных задачах, но и требует новой постановки задач о взаимодействии надземных и подземных трубопроводов с сейсмическими волнами в, так называемом, сверхзвуковом режиме, когда скорость сейсмических волн превышает скорость распространения волн в трубопроводе.

4. Расчеты по полученным формулам показывают, что в случаях, когда упругие модули демпфирующего материала в сложных стыках (например, мягкого металла) имеют один порядок с упругими модулями материала труб, то усредненные скорости незначительно отличаются от скоростей распространения волн в однородном трубопроводе. Так, наличие сварных швов практически не влияет на стержневую скорость волн в трубопроводе.

**Часть исследования (п. 2) выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00024.**

### **Литература**

1. Ильюшин А.А., Рашидов Т. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. Акад. наук УзССР. Сер. техн. наук. 1971. № 1. С. 37 – 42.
2. Melissianos V. Buried steel pipelines with flexible joints under faulting. Doctoral thesis. Athens: National Technical Univ. of Athens. 2016. 200 p.
3. O'Rourke M.J., Liu X. Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER). 1999. 238 p.

4. Ильюшина Е. А. Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды неоднородной периодической структуры // Прикл. матем. и механ. 1972. 36. № 6. С. 1089 – 1093.
5. Israilov M.Sh. Longitudinal seismic vibrations of a segmented pipeline considering as the periodically inhomogeneous rod // Proceedings of the 5-th Int. Conf. on Comp. Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2015). Eds.: M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, V. Plevris. Crete, Greece, 2015. Vol. II, pp. 4663 - 4671.
6. Исраилов М.Ш. Новый подход в задачах о сейсмических колебаниях периодически неоднородных подземных трубопроводов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математ. Механ. 2016. № 1. С. 68 - 71. (Engl. trans.: M.Sh. Israilov. A new approach to solve the problems of seismic vibrations for periodically nonuniform buried pipelines // Moscow Univ. Mechanics Bulletin, 2016, Vol. 71, No 1, pp. 23 - 26).
7. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. Изд-во Моск. ун-та. 1992. 206 с.
8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: «Мир». 1982. 334 с. (Christensen R.M. Mechanics of composite materials. N.-Y.: John Wiley & Sons, 1979).
9. Рашидов Т. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Изд-во «ФАН», УзССР. 1973. 180 с.
10. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 192 с. (Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford Univ. Press. 1953).

### References:

1. Il'yushin A.A., Rashidov T. O dejstvii sejsmicheskoy volny na podzemnyj truboprovod // Izv. Akad. nauk UzSSR. Ser. tekhn. nauk. 1971, no. 1, pp. 37 – 42.
2. Melissianos V. Buried steel pipelines with flexible joints under faulting. Doctoral thesis. Athens: National Technical Univ. of Athens. 2016. 200 p.
3. O'Rourke M.J., Liu X. Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), 1999. 238 p.
4. Il'yushina E. A. Variant momentnoj teorii uprugosti dlya odnomernoj sploshnoj sredy neodnorodnoj periodicheskoy struktury // Prikl. matem. i mekhan. 1972, 36, no. 6, pp. 1089 – 1093.
5. Israilov M.Sh. Longitudinal seismic vibrations of a segmented pipeline considering as the periodically inhomogeneous rod // Proceedings of the 5-th Int. Conf. on Comp. Methods in Structural Dynamics and Earthquake

- Engineering (COMPDYN 2015). Eds.: M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, V. Plevris. Crete, Greece, 2015. Vol. II, pp. 4663 - 4671.
6. Israilov M.SH. Novyj podhod v zadachah o sejsmicheskikh kolebaniyah periodicheski neodnorodnyh podzemnyh truboprovodov //Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matemat. Mekhan. 2016, no. 1, pp. 68 - 71. (Engl. trans.: M.Sh. Israilov. A new approach to solve the problems of seismic vibrations for periodically nonuniform buried pipelines // Moscow Univ. Mechanics Bulletin, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 23 - 26).
  7. Israilov M.SH. Dinamicheskaya teoriya uprugosti i difrakciya voln. Izd-vo Mosk. un-ta. 1992. 206 p.
  8. Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. M.: «Mir», 1982, 334 p. (Christensen R.M. Mechanics of composite materials. N.-Y.: John Wiley & Sons, 1979).
  9. Rashidov T. Dinamicheskaya teoriya sejsmostojkosti slozhnyh sistem podzemnyh sooruzhenij. Tashkent: Izd-vo «FAN», UzSSR, 1973. 180 p.
  10. Kol'skij G. Volny napryazheniya v tverdyh telah. M.: Izd-vo inostr. lit., 1955. 192 p. (Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford Univ. Press. 1953).

*Для цитирования:* Исраилов М.Ш., Смирнова Л.Н. Вычисление скоростей распространения волн в сегментных трубопроводах с демпфирующими стыками // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №2. С. 3-17. DOI:[10.37153/2618-9283-2020-2-3-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-3-17)

*For citation:* Israilov M. Sh., Smirnova L.N. Calculation of Wave Velocities in Segmented Pipelines with Flexible Joints. Earthquake Engineering. Constructions Safety. 2020, no. 2, pp. 3-17. [In Russian] DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-3-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-3-17)



УДК: 624.042.7

**Свободные колебания жесткой кинематической опоры  
Ю.Д.Черепинского****Тяпин А.Г.**АО «Атомэнергопроект»  
Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** В статье выводятся уравнения свободных колебаний жесткой кинематической опоры качения Ю.Д. Черепинского в предположении о жесткости поверхности качения и об отсутствии проскальзывания при качении. Показано, что уравнения Лагранжа соответствуют уравнениям движения вращательного осциллятора, в котором центр вращения, момент инерции и жесткость меняются в каждый момент времени в зависимости от перемещений. Показано, что это уравнение приводится к линейному уравнению с точностью до второго порядка малости по перемещениям. Качественно уравнение похоже на уравнение колебаний математического маятника, но эффективная длина маятника в данном случае определяется радиусами кривизны опоры и поверхности качения, а также расположением точки приложения вертикальной нагрузки относительно центра кривизны опоры. Нелинейная характеристика является мягкой. Основную роль играет нелинейность не в жесткостном, а в инерционном члене.

**Ключевые слова:** кинематическая опора качения, свободные колебания, уравнение Лагранжа

**Free Vibrations of Rigid Kinematic Support of Yu.D. Cherepinsky**Tyapin Alexander G.  
JSC «Atomenergoproject»  
Moscow, Russian Federation

**Abstract.** The author derives the equation of free vibrations for kinematical rolling support of Yu.D.Cherepinsky. Both support and the surface below are assumed rigid. It is shown that Lagrange equation is similar to the equation of motion for rotational oscillator where the rotation centre, rotational inertia and stiffness are changing every moment, depending on displacements. This equation can be further simplified to the linear form with the error proportional to the second degree of displacements. This equation looks somewhat like the equation for classical pendulum, but effective length in our case is controlled by curvature radii of

support and of the rolling surface, as well as by the position of vertical load relative to the centre of the support. Non-linear characteristic is soft. The main non-linearity is in the inertial term, and not in the stiffness term.

**Keywords:** kinematical rolling support, free vibrations, Lagrange equation

**DOI:** [10.37153/2618-9283-2020-2-18-31](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-18-31)

Вот уже продолжительное время многие авторы предлагают конструкции кинематических опор. Когда-то в СССР энтузиастом внедрения таких опор был Ю.Д.Черепинский [1]. Он разработал опоры, которые назвал КФ (от «кинематический фундамент»). Однако мы будем называть их «опорами Ю.Д.Черепинского», т.к. понятие «кинематический фундамент» оказалось шире и относится не к одному, а к нескольким классам опор такого рода. Отличительной чертой «опор Черепинского» была сферическая поверхность опоры внизу и шарнирное крепление здания к опоре наверху.

Следующим шагом развития кинематических опор можно считать «опоры В.В.Назина» [2], в которых внизу осталась сферическая поверхность, как у опор Черепинского, но вверху тоже была устроена сферическая поверхность, по которой катилась плоская жесткая подошва фундамента сооружения. Кроме этих двух типов, были предложены еще несколько, перечисленных в работе [3].

Одной из последних известных автору модификаций кинематических опор стала опора, которую мы будем называть «опорой Семенова». В ней нижняя поверхность опоры плоская и покрыта металлической пластиной, которая деформируется при качании. Сегодня такие опоры используются в Сочи в проектах С.Ю.Семенова. Однако у автора есть определенные сомнения, можно ли называть эти опоры кинематическими. В представлении автора кинематические опоры работают как система абсолютно твердых тел, а податливость (упругая или пластическая) вносит лишь вторичный вклад. Применительно к «опорам С.Ю.Семенова» этот тезис не очевиден (по крайней мере, для автора).

Названия, разумеется, во многом условны и предназначены только для обозначения разных конструкций: автору, скажем, известно, что тот же С.Ю.Семенов активно работал и с опорами Ю.Д.Черепинского.

Многочисленные обсуждения показали, что при наличии большого экспериментального материала явно не хватает теоретического осмысления предложенных конструкций. Автор хотел бы предложить свой подход к такому осмыслению. В данной публикации обсуждаются плоские свободные колебания одной кинематической опоры Ю.Д.Черепинского с небольшим обобщением: поверхность качения тоже сферическая, а не плоская, как у Ю.Д.Черепинского. Свободные колебания опоры - это тот случай, который С.Ю.Семенов демонстрировал на XIII Российской Конференции по

сейсмостойкому строительству в фильме: он раскачивал отдельно стоящую опору-стойку (на плоской поверхности качения), и она затем совершала свободные колебания.

Если мы ограничимся плоской задачей, то перед нами механизм с одной степенью свободы (при этом движение центра тяжести поступательное в двух направлениях: горизонтальном и вертикальном; также присутствует качение). Поставим цель записать уравнения свободных колебаний такой системы в предположении об абсолютной жесткости как опоры, так и поверхности качения.

Более подробно рассмотрим одну кинематическую опору, показанную на рис.1. Радиус кривизны поверхности качения  $R$ , радиус кривизны опоры  $r$ . Вертикальная нагрузка от веса опоры  $Mg$  приложена в ее центре тяжести - точке  $B$ , которая неподвижно закреплена на движущейся опоре на расстоянии  $L$  от центра ее кривизны - точки  $O$ . На рисунке показано смещенное положение, когда опора касается поверхности качения в точке  $A$ .

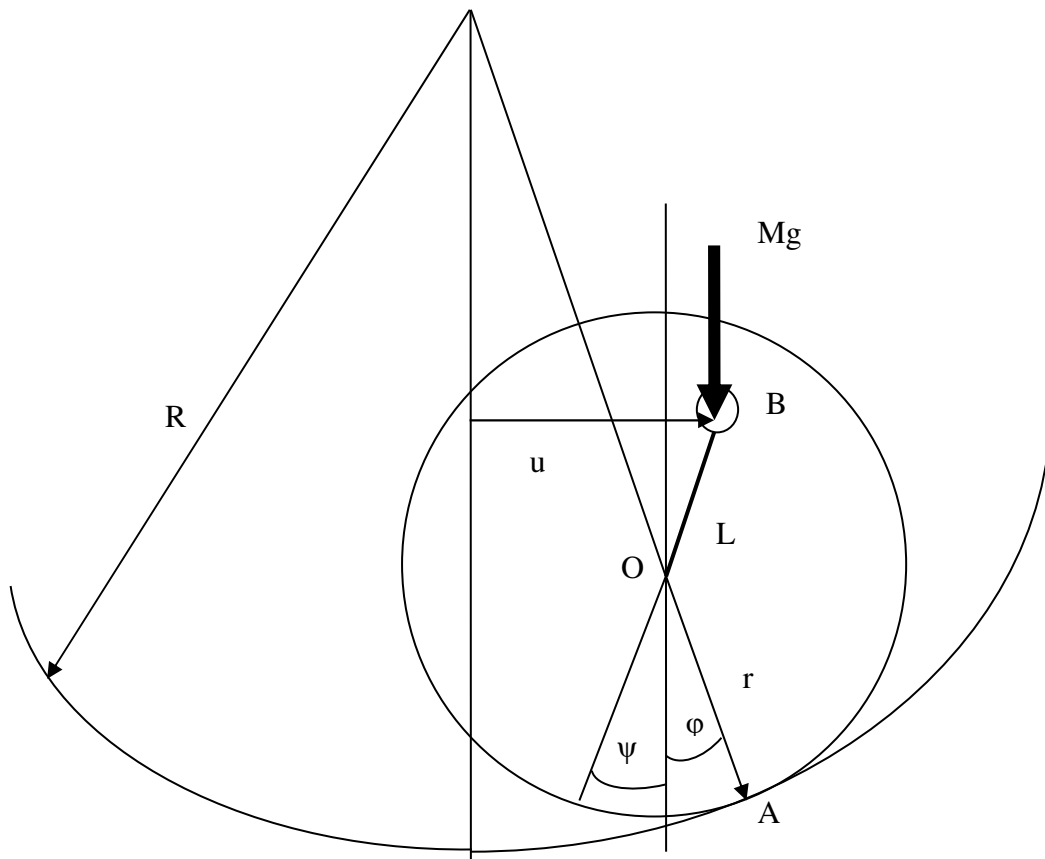


Рисунок 1 - Геометрия кинематической опоры  
Figure 1 - Geometry of kinematical support

Выпишем основные геометрические соотношения, вытекающие из рис.1. Из условия качения без проскальзывания длина дуги большой окружности должна быть равна длине дуги малой окружности:

$$R \varphi = r (\varphi + \psi) \quad (1)$$

Горизонтальное смещение точки приложения веса В складывается из горизонтального перемещения точки О и относительного горизонтального перемещения точки В относительно точки О. Оно равно

$$u = (R - r) \sin \varphi + L \sin \psi \quad (2)$$

Вертикальное смещение точки приложения веса В (оно не показано на рисунке, чтобы его не затемнять) тоже складывается из вертикального перемещения точки О и относительного вертикального перемещения точки В относительно точки О. Оно равно

$$v = (R - r) (1 - \cos \varphi) - L (1 - \cos \psi) \quad (3)$$

Отметим, что значение  $L$  может быть как положительным, так и отрицательным. На рис.1 показано положительное значение, но это условность.

Угловое смещение опоры определяется углом  $\psi$ .

Кинетическая энергия определяется произведением массы  $M$  на квадрат поступательной скорости, а также произведением момента инерции  $I_0$  на квадрат угловой скорости:

$$T = \frac{1}{2} [M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + I_0 \dot{\psi}^2] \quad (4)$$

Потенциальная энергия определяется подъемом массы:

$$U = M g v \quad (5)$$

На этом этапе можно записать уравнение Лагранжа, реализующее принцип Гамильтона [4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} (T - U) = 0 \quad (6)$$

Теперь реализуем эту схему, приняв за основную степень свободы угол  $\psi$ . Из уравнения (1) имеем

$$\varphi = \psi \alpha; \quad \alpha = r / (R - r); \quad R - r = r / \alpha \quad (7)$$

Горизонтальное перемещение (2) выражается через угол  $\psi$  так:

$$u = (r/\alpha) \sin(\alpha\psi) + L \sin\psi \quad (8)$$

Вертикальное перемещение (3) выражается через угол  $\psi$  так:

$$v = (r/\alpha) [1 - \cos(\alpha\psi)] - L [1 - \cos\psi] \quad (9)$$

Кинетическая энергия выражается через сумму квадратов горизонтальной и вертикальной скорости, а также угловой скорости так:

$$T = 0.5 M \dot{\psi}^2 \{ [r \cos(\alpha\psi) + L \cos\psi]^2 + [r \sin(\alpha\psi) - L \sin\psi]^2 \} + 0.5 I_0 \dot{\psi}^2 \quad (10)$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках в правой части (10), используя известные формулы тригонометрии и раскрыв квадраты сумм:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2(\alpha\psi) + L^2 \cos^2\psi + 2rL \cos(\alpha\psi) \cos\psi + r^2 \sin^2(\alpha\psi) + L^2 \sin^2\psi - 2rL \sin(\alpha\psi) \sin\psi = \\ = r^2 + L^2 + 2rL \cos(\alpha\psi + \psi) \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь начнем выписывать члены уравнения Лагранжа (6). Из (10) с учетом (11) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} T = M \dot{\psi} [r^2 + L^2 + 2rL \cos(\alpha\psi + \psi)] + I_0 \dot{\psi} \quad (12)$$

Дифференцирование по времени (12) даст инерционные члены и некий дополнительный член, пропорциональный квадрату скорости:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} T \right) = M \ddot{\psi} [r^2 + L^2 + 2rL \cos(\alpha\psi + \psi)] - 2rL M (\dot{\psi})^2 (\alpha + 1) \sin(\alpha\psi + \psi) + I_0 \ddot{\psi} \quad (13)$$

Дифференцирование (10) по обобщенной координате (см. второй слагаемый уравнения Лагранжа (6)) тоже даст член, пропорциональный квадрату скорости, который взаимно уничтожится с половиной предыдущего:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} T = -rL M (\dot{\psi})^2 (\alpha + 1) \sin(\alpha\psi + \psi) \quad (14)$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = M \ddot{\psi} [r^2 + L^2 + 2rL \cos(\alpha\psi + \psi)] - rL M (\dot{\psi})^2 (\alpha + 1) \sin(\alpha\psi + \psi) + I_0 \ddot{\psi} \quad (15)$$



Для вывода уравнения Лагранжа остается только проинтегрировать по обобщенной координате потенциальную энергию

$$\frac{\partial}{\partial \psi} U = M g [r \sin(\alpha \psi) - L \sin(\psi)] \quad (16)$$

Итак, мы пришли к уравнению собственных колебаний системы с одной степенью свободы, записываемому в виде:

$$\ddot{\psi} A_1(\psi) + \dot{\psi}^2 A_2(\psi) + A_3(\psi) = 0 \quad (17)$$

$$A_1(\psi) = \{I_0 + M [r^2 + L^2 + 2rL \cos(\alpha \psi + \psi)]\} \quad (18)$$

$$A_2(\psi) = -rL M (\alpha + 1) \sin(\alpha \psi + \psi) \quad (19)$$

$$A_3(\psi) = M g [r \sin(\alpha \psi) - L \sin(\psi)] \quad (20)$$

Остановимся на физическом смысле коэффициентов, входящих в это уравнение. Член в квадратных скобках в (18) – это квадрат длины отрезка АВ от точки А мгновенного опирания до точки В приложения весовой нагрузки. Отсюда следует, что в правой части (18) стоит момент инерции опоры относительно мгновенного центра вращения А, равный сумме момента инерции вращения  $I_0$  относительно центра масс В и произведения сосредоточенной массы  $M$  на квадрат радиуса вращения АВ. Член в квадратных скобках в (20) – это плечо приложенной весовой нагрузки относительно мгновенной опоры в точке А. Таким образом, восстанавливающая сила (20) равна произведению весовой нагрузки на плечо относительно мгновенной опоры А. Второй член уравнения (17) появляется из-за движения мгновенной опоры А, приводящего к изменению момента инерции за счет изменения радиуса вращения.

Другими словами, движение опоры можно разложить в сумму поступательного движения вместе с точкой В и вращения относительно В на угол  $\psi$ . Можно посчитать поступательные ускорения точки В, дважды проинтегрировав по времени (8) и (9). При этом дифференцировании как раз и появятся члены с квадратом угловой скорости, определяющие второй слагаемый в (17).

Опора должна находиться в равновесии после приложения в точке В сил инерции, связанных с поступательным движением точки В, а также после приложения вращательного момента инерции. Эти инерционные силы и момент инерции вращения уравновешиваются силами реакции в опоре А и весом, приложенным в точке В. Чтобы не определять силы реакции в точке А, условие равновесия запишем в виде равенства моментов относительно точки А. Если рассчитать момент горизонтальной и вертикальной сил

инерции, приложенных в точке В, относительно мгновенного центра вращения А и добавить момент сил инерции, связанный с вращением, то мы приходим к тому, что первые два члена в (17) как раз и равны моменту указанных инерционных сил относительно точки А при поступательном движении точки В и вращении опоры относительно точки А.

Проверим себя. При стремлении  $R$  к бесконечности мы получаем качение по плоскости. При этом, согласно (7),  $\alpha=0$ . Положим равной нулю также вращательную инерцию:  $I_0=0$ . Тогда все коэффициенты (18...20) уравнения (17) можно поделить на  $M r^2$  и прийти к уравнению

$$\ddot{\psi}[1 + \beta^2 + 2\beta \cos\psi] - \dot{\psi}^2 \beta \sin\psi - \beta (g/r) \sin\psi = 0; \quad \beta = L/r \quad (21)$$

Легко убедиться, что это уравнение совпадает с уравнением для опоры Ю.Д.Черепинского, приведенным в [3] в таблице для разных видов опор, если положить в этом уравнении [3] ширину верхнего ребра  $b$  равной нулю (т.е. практически использовать модель данной статьи).

В принципе, коэффициенты (18-20) уравнения (17) можно переписать так, чтобы уравнение (17) превратилось в уравнение собственных колебаний одномассового осциллятора с переменной по времени инерцией и переменной жесткостью, причем масса зависит от перемещений осциллятора, а жесткость - еще и от квадрата его скорости:

$$A_1(\psi) = \{I_0 + M(r+L)^2 + 2MrL[\cos(\alpha\psi + \psi) - 1]\} \quad (22)$$

$$\psi^2 A_2 + A_3 = M \left\{ g \alpha r \frac{\sin(\alpha\psi)}{\alpha\psi} - g L \frac{\sin(\psi)}{\psi} - \dot{\psi}^2 r L (\alpha+1)^2 \frac{\sin[(\alpha+1)\psi]}{(\alpha+1)\psi} \right\} \psi \quad (23)$$

Член с квадратом скорости отнесен здесь к жесткостному коэффициенту, хотя и имеет инерционное происхождения. Предостерегу от трактовки этого члена как вязко-демпфирующего из-за участия в нем скорости. Скорость стоит в квадрате. И физически рассеяния энергии в этой системе пока просто нет – свободные колебания будут незатухающими.

Конечно, в принципе можно было бы поделить уравнение (17) на  $A_1$  и получить уравнение свободных колебаний осциллятора с единичной инерцией. Однако жесткостной член такого уравнения получится совсем уже нефизичным, что потребует повышенного внимания при переходе к вынужденным колебаниям. Вместе с тем, такая операция (приведение инерционного коэффициента к единице) полезна при численном интегрировании уравнения движения.

Обратим внимание на то, что и инерционный коэффициент (22), и жесткостной коэффициент (23) зависят только от второй и более высоких степеней углового перемещения  $\psi$ . Линеаризованный (при малых углах) вид этого уравнения такой:

$$\ddot{\psi} [I_0 + M(r+L)^2] + M g [r\alpha - L] \psi = 0 \quad (24)$$

Чтобы система была устойчива при малых перемещениях, требуется выполнение условия положительности возвращающей силы

$$L < \alpha r \quad (25)$$

При больших радиусах  $R$  (когда поверхность качения становится все более плоской) коэффициент  $\alpha$  стремится к нулю, и условие (25) превращается в условие отрицательности  $L$ .

Введем обозначения

$$r_0 = (I_0 / M)^{1/2}; \quad h = r + L \quad (26)$$

Отметим, что длина  $h$  равна высоте точки В над поверхностью качения в положении равновесия (т.е. при нулевом угле  $\psi$ ), а  $r_0$  - радиусу инерции опоры.

Тогда коэффициент (22) можно поделить на  $M$  и получить инерционный коэффициент для осциллятора в виде

$$C_1 = \frac{A_1}{M} = r_0^2 + h^2 + 2r(r-h)[1 - \cos(\alpha\psi + \psi)] \quad (27)$$

Аналогично коэффициент (23) можно поделить на  $(M \psi)$  и получить жесткостной коэффициент для того же осциллятора:

$$C_2 = \frac{\psi^2 A_2 + A_3}{M \psi} = g \left\{ \alpha r \frac{\sin(\alpha\psi)}{\alpha\psi} + (r-h) \frac{\sin\psi}{\psi} + \frac{\psi^2 r}{g} (r-h)(\alpha+1)^2 \frac{\sin(\alpha\psi + \psi)}{\alpha\psi + \psi} \right\} \quad (28)$$

Мгновенная "секущая" собственная частота такого осциллятора (в квадрате) будет равна  $C_2/C_1$  и будет зависеть как от перемещения, так и от скорости. Выражение для этой частоты напоминает выражение для квадрата собственной частоты классического маятника  $g/H$ , но эффективная длина маятника  $H$  в нашем случае зависит от перемещения и от квадрата скорости. При малых перемещениях эта длина равна

$$H = (r-h) \frac{r_0^2 + h^2}{(r-h)^2} / \left\{ 1 + \frac{\alpha r}{r-h} \right\} \quad (29)$$

С учетом введенных обозначений перепишем выражение (8) для горизонтальных перемещений точки В:

$$u = \psi \left[ r \sin(\alpha\psi) / (\alpha\psi) + L \sin \psi / \psi \right] = \psi \left\{ h + r \left[ \frac{\sin(\alpha\psi)}{\alpha\psi} - 1 \right] - (r - h) \left[ \frac{\sin \psi}{\psi} - 1 \right] \right\} \quad (30)$$

Коэффициенты в квадратных скобках имеют второй порядок малости по перемещениям. При малых перемещениях коэффициент в фигурных скобках близок к высоте  $h$  точки приложения силы над точкой опоры в положении равновесия.

Рассмотрим два следующих численных примера. Пусть высота центра тяжести над поверхностью качения  $h$  равна 1 м, поверхность качения плоская ( $\alpha=0$ ), а радиус кривизны опоры составляет  $r=18$  м в первом примере и  $r=2,4$  м во втором примере. Пусть далее радиус инерции опоры  $r_0$  равен 0,7 м. Рассмотрим диапазон углов  $\psi$  от нуля до 0,3.

На рис.2 показаны кривые зависимости длины дуги (т.е. смещения точки опирания по горизонтали на плоскости качения) от угла, а также кривые зависимости горизонтальных перемещений центра тяжести от угла. Первые кривые – линейные согласно (1) и (7), вторые кривые – почти линейные согласно (30). Обратим внимание на то, что перемещение центра тяжести в двух примерах практически совпадает при малых углах. Это неудивительно и является следствием совпадения высоты  $h$  в двух примерах: в формуле (30) от радиуса  $r$  (разного в двух примерах) результат практически не зависит.

Обращает на себя внимание тот факт, что сравнительно небольшие горизонтальные перемещения центра тяжести опоры (порядка 5 см) в первом примере соответствуют большим смещениям точки качения (порядка 90 см). И действительно, формулы показывают, что смещение точки опирания относится к перемещению центра тяжести опоры примерно, как  $r/h$ . Естественно, во втором примере с уменьшением  $r$  при сохранении высоты  $h$  смещения точки опирания стали меньше.

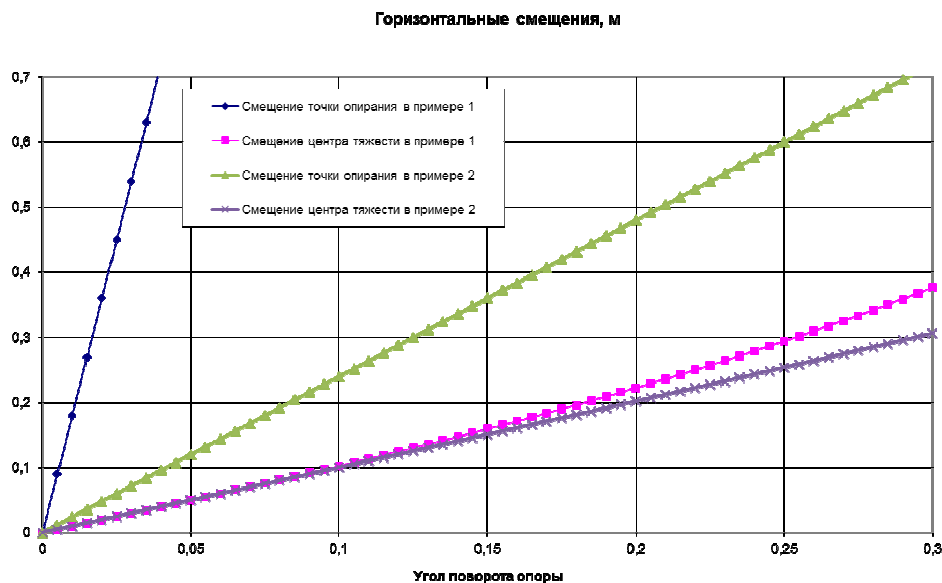


Рисунок 2 - Горизонтальные перемещения в зависимости от угла  $\psi$   
Figure 2 - Horizontal displacements linked to the  $\psi$  angle

На рис.3 показана зависимость мгновенной «секущей» собственной частоты от угла поворота в том же диапазоне углов поворота опоры. Рассматривается момент времени с максимальным перемещением, равным амплитуде, так что скорость в этот момент равна нулю (иными словами, разные точки на каждой кривой относятся не к разным моментам времени в одной записи собственных колебаний, а к разным вариантам начальных отклонений от положения равновесия).

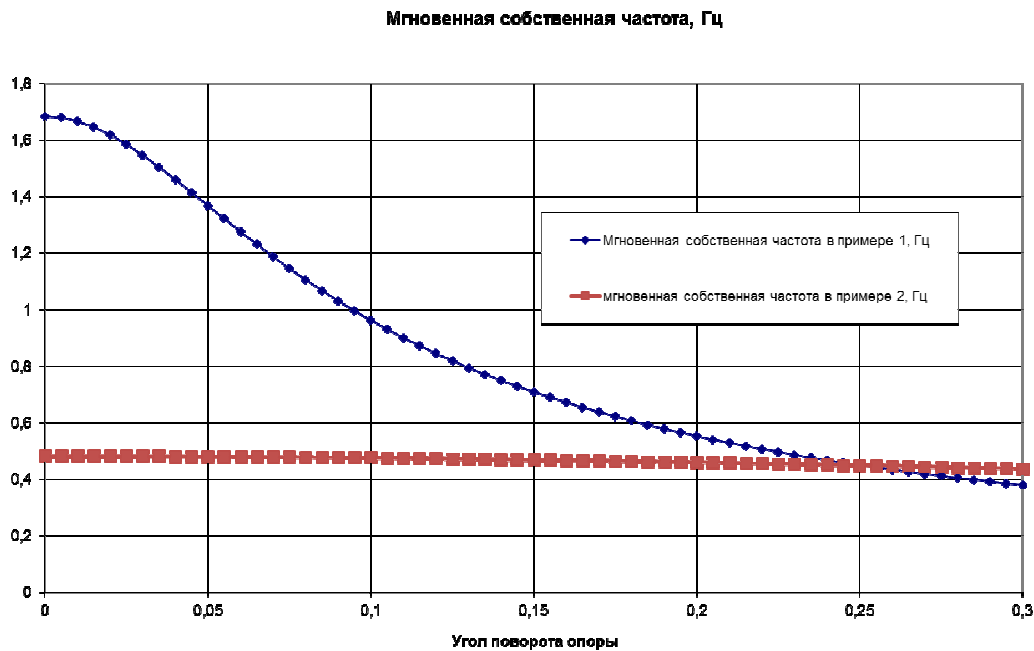


Рисунок 3 - Зависимость мгновенной собственной частоты от угла поворота  
Figure 3 - Instant eigenfrequency linked to the rotation angle

Мы видим, что с увеличением угла поворота мгновенная собственная частота уменьшается, т.е. нелинейная характеристика является «мягкой». В первом примере степень уменьшения в рассмотренном диапазоне перемещений очень велика. Дополнительные вычисления показывают, что собственная частота изменяется не столько за счет изменения жесткостного члена (28) с ростом перемещений, сколько за счет изменения инерционного члена (27) с ростом перемещений. Действительно, в инерционном члене уравнения (27) коэффициент  $2r(r-h)$  при  $[1-\cos(\alpha\psi+\psi)]$  оказывается значительно больше постоянного члена  $r_0^2+h^2$ , так что нелинейность в инерционном члене заметна. Во втором примере после уменьшения радиуса  $r$  при сохранении  $h$  коэффициент  $2r(r-h)$  резко уменьшился, и нелинейность стала заметна меньше (хотя она не исчезла – на рис.3 уменьшение частоты в примере 2 составило около 10%).

Представляет интерес оценка влияния слагаемого с квадратом скорости в правой части (28). Максимальная скорость достигается при свободных колебаниях в момент прохождения нулевой точки, и ее можно найти, приравняв кинетическую энергию (10) при нулевом угле и потенциальную

энергию при максимальном отклонении  $\psi_0$ , определяемую весом и вертикальным перемещением (9). В нашем случае после деления на массу  $M$  получим уравнение

$$g(r-h)(1-\cos\psi_0) = 0.5[h^2 + h_0^2]\dot{\psi}^2 \quad (31)$$

Отсюда найдем величину, стоящую в правой части (28):

$$\frac{\dot{\psi}^2 r}{g} = \frac{2r(r-h)(1-\cos\psi_0)}{h^2 + h_0^2} \quad (32)$$

Именно значение выражения (32) должно сравниваться с единицей в правой части (28) для оценки роли рассматриваемого члена в общей жесткости. Отметим интересное совпадение: если посмотреть на инерционный член (27), то относительный вклад третьего слагаемого (нелинейного) тоже оценивается правой частью (32). Таким образом, один и тот же коэффициент описывает как относительный вклад нелинейности в инерционный член (27), так и относительный вклад квадрата скорости в жесткостной член (28).

Вычислим значение (32) в двух рассматриваемых примерах. В обоих примерах знаменатель в правой части (32) равен  $1,49 \text{ м}^2$ . При максимальном рассмотренном угле поворота  $\psi_0=0,3$  в первом примере значение (32) равно примерно  $18,34$ , а во втором примере оно равно  $0,2$ . Это подтверждает вывод о том, что в первом примере нелинейность (в том числе за счет влияния квадрата скорости) очень существенна, а во втором примере – не очень. Все определяется геометрическими параметрами – прежде всего, радиусом кривизны опоры.

Проверим этот вывод на втором примере, проведя численное интегрирование уравнения свободных колебаний для ненулевого начального перемещения (пусть это будет все тот же угол, равный  $\psi_0=0,3$ ) и нулевой начальной скорости. На рис.4 показано сравнение перемещений, полученных численным интегрированием полного нелинейного уравнения, с одной стороны, и линеаризованного уравнения, в другой.

Как и следовало ожидать, в обоих случаях мы видим свободные колебания без затухания, причем период колебаний нелинейной системы примерно на  $10\%$  больше, чем у линеаризованной системы. На первый взгляд кажется, что две основные нелинейности должны примерно уравновешивать друг друга: нелинейность в инерционном члене (27) приводит к повышению массы и уменьшению ускорения, а нелинейность в жесткостном члене (28), связанная с квадратом скорости, увеличивает жесткость и ускорение. Однако, насколько понимает автор, вторая нелинейность проявляется при максимальных скоростях, достигаемых в тот момент, когда перемещения малы. А поскольку жесткостной член (28) при вычислении

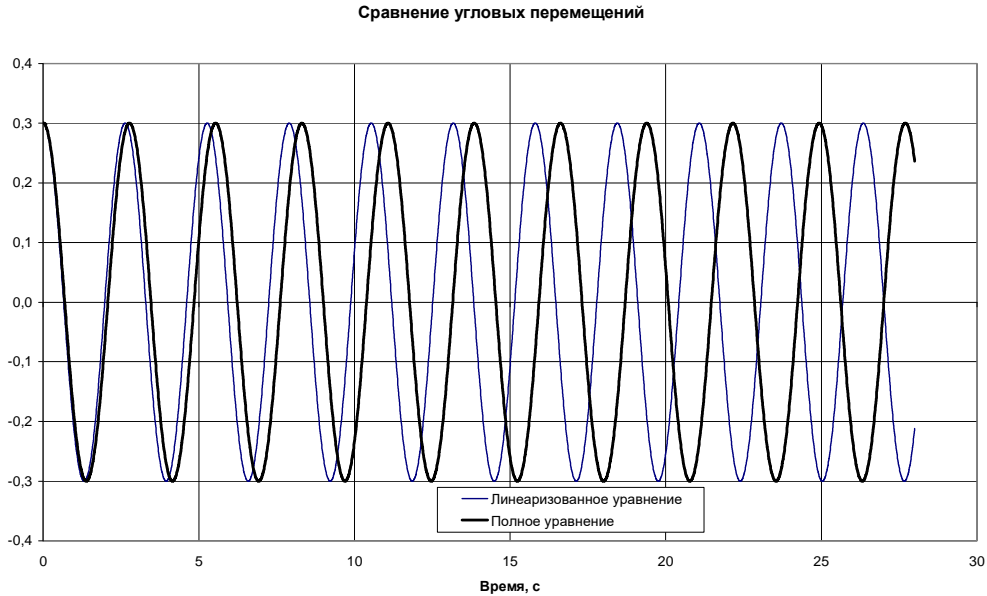


Рисунок 4 - Сравнение перемещений в нелинейной и линеаризованной системе при свободных колебаниях

Figure 4 - Comparison of the angular displacements in the nonlinear system and in the linearized system

ускорений умножается на перемещения, то даже его увеличение после умножения жесткости на маленькие перемещения не сказывается на ускорениях заметным образом. В итоге преобладает влияние первой нелинейности, приводящей к увеличению периода собственных колебаний.

Для лучшего понимания ситуации на рис.5 приведено сравнение еще и угловых ускорений для того же примера. Здесь уже заметно различие не только в периодах, но и в амплитуде ускорений (что вполне логично вытекает из равенства амплитуд перемещений и из снижения эффективной собственной частоты за счет нелинейности).

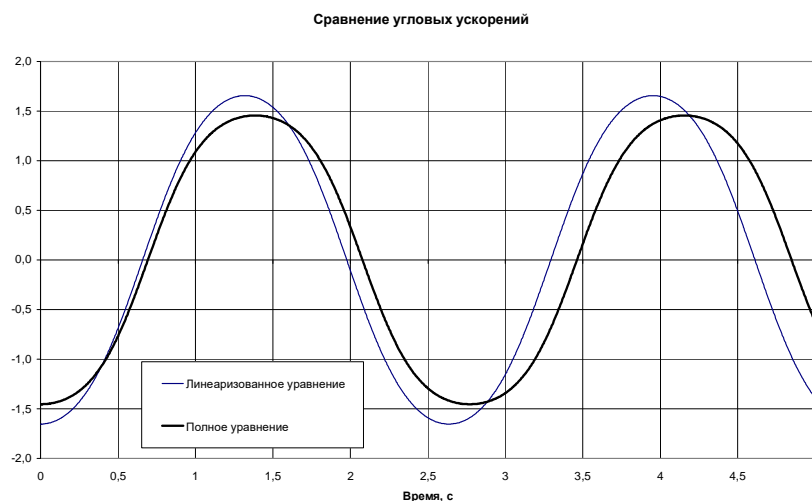


Рисунок 5 - Сравнение ускорений в нелинейной и линеаризованной системе при свободных колебаниях

Figure 5 - Comparison of the angular accelerations in the nonlinear system and in the linearized system

Для второго примера, взятого из практики, можно сделать вывод о том, что свободная опора в этом случае ведет себя в рассмотренном диапазоне перемещений почти как линейный осциллятор. Нелинейность ведет к небольшому увеличению периода собственных колебаний и уменьшению амплитуд ускорений по сравнению с линеаризованным уравнением при том же начальном отклонении. Важно отметить, что обе основные нелинейности по своему происхождению связаны с инерцией, т.е. их нельзя отследить по результатам статических испытаний (типа построения статической диаграммы "возвращающая сила-перемещение").

До сих пор рассматривался осциллятор без демпфирования. В системе абсолютно жестких тел демпфирования нет. Но на практике демпфирование появится за счет пластических деформаций в точке мгновенной опоры. Поэтому в качестве начального приближения разумно принять демпфирование на уровне демпфирования для стали (2% при малых колебаниях).

Напрашивается первый этап валидации теоретической модели: для отдельно стоящей опоры экспериментально записать свободные колебания, а по записям оценить частоту собственных колебаний и коэффициент затухания, а затем сравнить с теоретическими значениями. Обязательно надо определить положение центра тяжести опоры и инерцию опоры на вращение вокруг центра тяжести – это можно сделать с помощью конечно-элементного моделирования. Сравнение подтвердит или опровергнет правильность заложенных допущений.

Автор считает, что подобная валидация должна быть проведена на самом первом этапе. Только после этого можно будет приступить к расчету сначала свободных колебаний, а затем и сейсмической реакции сооружения (сначала абсолютно жесткого, а потом и податливого). Автор планирует продолжить теоретические выкладки для сооружения на маятниковых опорах.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Черепинский Ю.Д., Жунусов Т.Ж., Горвиц И.Г. Активная сейсмозащита зданий и сооружений. Алма-Ата: КазНИИТИ. 1985. 32 с.
2. Назин В.В. Экспериментальные здания в Севастополе на гравитационных системах сейсмоизоляции с включающимся сухим трением // Тезисы докладов республиканской конференции «Сейсмостойкое строительство в Узбекской ССР». Ташкент: Фан. 1974.
3. Уздин А.М., Долгая А.А. Расчет элементов и оптимизация параметров сейсмоизолирующих фундаментов. М.: ВНИИТПИ. 1997. 76 с.
4. Вибрации в технике. Справочник. В 6-и т./Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М: Машиностроение. 1978. 352 с.



**REFERENCES**

1. Cherepinskiy Yu.D., Zhunusov T.Zh., Gorvic I.G. Aktivnaya sejsmozashchita zdaniy i sooruzhenij. Alma-Ata: KazNIINTI. 1985. 32 p. [In Russian]
2. Nazin V.V. Eksperimental'nye zdaniya v Sevastopole na gravitacionnyh sistemah sejsmoizolyacii s vklyuchayushchimsya suhim treniem // Tezisy dokladov respublikanskoi konferencii «Seismostoitkoe stroitel'stvo v Uzbekskoi SSR». Tashkent: Fan. 1974. [In Russian]
3. Uzdin A.M., Dolgaya A.A. Raschet elementov i optimizatsiya parametrov sejsmoizoliruyushchih fundamentov. M.: VNIINTPI. 1997. 76 p. [In Russian]
4. Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. V 6-i t./T.1. Kolebaniya linejnyh system / Pod red. V.V. Bolotina. M: Mashinostroenie. 1978. 352 p. [In Russian]

*Для цитирования:* Тяпин А.Г. Свободные колебания жесткой кинематической опоры Ю.Д. Черепинского // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №2. С. 18-31. DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-18-31](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-18-31)

*For citation:* Tyapin A.G. Free Vibrations of Rigid Kinematic Support of Yu.D. Cherepinsky. Earthquake Engineering. Constructions Safety. 2020, no. 2, pp. 18-31. [In Russian] DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-18-31](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-18-31)

УДК 624.04

**Развитие моделей колебаний основания и нормативных подходов к расчетам ответственных сооружений на сейсмические воздействия**

Ведяков И.И., доктор технических наук, профессор  
Востров В.К., доктор технических наук

ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство»  
Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Используются и уточнены предложенные в практике сейсмостойкого строительства два принципиальных подхода к генерации расчетных сейсмических воздействий - под площадку строительства и под сооружение. Выделяются особые, аварийные и запредельные сейсмические нагрузки, создающие аварийную ситуацию - возникновение режима биений или резонансных колебаний, а также автоколебаний (острого резонанса), приводящие к нарушению либо эксплуатационных свойств, либо несущей способности сооружения. Сформулированы предложения при пересмотре российских норм сейсмостойкого строительства, основанные на трехуровневом воздействии для ответственных и уникальных сооружений с использованием предложенных уточненных подходов к генерации расчетных сейсмических воздействий.

**Ключевые слова:** аварийная ситуация, резонанс, острый резонанс, сейсмические воздействия, аварийные нагрузки, особые нагрузки

**Development of base oscillation models and regulatory approaches to the calculation of critical structures for seismic impacts**

Vedyakov I. I., Doctor of Engineering, Professor  
Vostrov V. K., Doctor of Engineering

JSC Research Center of Construction, TSNIISK named after V.A.Koucherenko  
Moscow, Russian Federation

**Abstract.** Two principal approaches to generating calculated seismic impacts, proposed in the practice of earthquake - resistant construction, were used and refined: for the construction site and for the structure. There are special, emergency and extreme seismic loads that create an emergency situation - the occurrence of a mode of beats or resonant vibrations, as well as self-oscillations (acute resonance), leading to a violation of either the operational properties or the load-bearing

capacity of the structure. Proposals are formulated for the revision of the Russian standards of earthquake-resistant construction, based on three-level impact for responsible and unique structures using the proposed refined approaches to generating calculated seismic impacts.

**Keywords:** emergency situation, resonance, acute resonance, seismic effects, emergency loads, special loads

**DOI:** [10.37153/2618-9283-2020-2-32-54](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-32-54)

Во введенном в действие с ноября 2018 г. СП 14.13330.2018 [1] выдвинуто требование о том, что при выполнении расчетов сооружений с учетом сейсмических воздействий следует применять две расчетные ситуации – РЗ (расчетное землетрясение) и КЗ (контрольное землетрясение).

По [2] разница между парами РЗ/КЗ и ПЗ/МРЗ, отмененного СП 14.13330.2014, принципиальна и фундаментальна. В редакции [1], по существу, рассматривается одноуровневый расчет, т.е. РЗ и КЗ одно и то же землетрясение с точки зрения средних периодов повторяемости. В последнее время появилась новая редакция как изменение №1 к СП 14.13330.2018 [3], но в ней также рассматривается одноуровневый расчет.

В отличие от [1] ПЗ (SL1) и МРЗ (SL2) это два физически разных сейсмических воздействия на данной площадке, характеризующиеся совершенно разными средними периодами повторяемости. В самом распространенном варианте средний период повторяемости ПЗ–1000 лет либо срок эксплуатации здания, а средний период повторяемости МРЗ составляет 10000 лет, или, по предложению А.Н. Бирбраера [4] наиболее сильное по интенсивности землетрясение, вообще потенциально возможное на данной площадке. В последнее время добавилось требование, чтобы за пределами МРЗ вплоть до некоторого запроектного уровня SL3 какие-то системы АЭС продолжали функционировать, чтобы минимизировать последствия аварии [5].

Разница между РЗ и КЗ не в периодах повторяемости, а в формате задания движений грунта - в виде спектров ответа ускорений для РЗ или в виде акселерограмм для КЗ. В связи с этим и расчеты ведутся разными методами: линейно-спектральным методом в случае РЗ и во времени в случае КЗ. В первом случае нелинейные эффекты учитываются приближенно коэффициентом  $K_1$ , а во втором случае - явным моделированием нелинейностей в элементах конструкции.

## **Совершенствование синтетических моделей сейсмического воздействия**

Смысл нескольких уровней воздействия в атомной энергетике заключается в том, что одно и то же сооружение рассчитывается на разные по интенсивности сейсмические воздействия с формулировкой разных

предельных состояний для этого сооружения и формулируются соответствующие критерии сейсмостойкости.

Введение трехуровневого расчета как для АЭС, так и для ответственных и уникальных гражданских зданий и сооружений требует кардинального пересмотра подходов предложенных в [5] и основанных на разных средних периодах повторяемости интенсивности сейсмических воздействий. Тем более, что в [5] не учитывается предложение А.Н. Бирбраера [4] для МРЗ как наиболее сильном землетрясении вообще потенциально возможном на данной площадке, и не ясно как определяется сейсмическое воздействие, соответствующее запроектному уровню SL3.

В работе [6] отмечается, что в мировой практике сложилось два принципиально разных подхода к генерации сейсмических воздействий: под площадку строительства и под сооружение. Первый подход (под площадку строительства) предполагает воздействие без учета особенностей сооружения. При этом воздействие генерируется под площадку строительства, используя акселерограммы прошлых землетрясений или нормативную спектральную кривую.

Ввиду того, что сооружение должно быть сейсмостойким на любой площадке строительства, при генерации сейсмических воздействий под сооружение, когда сейсмологические данные о площадке строительства фактически отсутствуют, модели воздействий, как правило, принимаются в виде ограниченного набора осциллирующих функций с частотами, опасными для сооружения. Для линейных систем это резонансные частоты; для нелинейных систем определение резонансных частот требует построения амплитудно-частотных характеристик.

Но, кроме обычного резонанса, в [7] введено понятие острого резонанса для одномерных колебаний простейших сооружений. Правую часть уравнения одномерных колебаний (3) можно рассматривать как некоторую сейсмическую силу, которая увеличивает кинетическую энергию сооружения тогда и только тогда, когда ее знак совпадает со знаком скорости  $v=\dot{y}$ . Динамический эффект является максимальным когда сейсмическая сила является постоянной по модулю и меняет знак при максимальных величинах смещений сооружения.

Отсюда следует, что сейсмическое ускорение основания, предложенного ранее в качестве аварийного воздействия в работе [8], должно быть равно

$$\ddot{U}(t) = -A_{\max} \cdot \text{sign}(\dot{y}). \quad (1)$$

Для первого типа землетрясений, когда происходит движение грунта почти точно в одном направлении, причем в одну сторону более сильное, чем в другую [9] в качестве аварийного воздействия можно выбрать

$$\ddot{U}(t) = -A_{\max} \cdot \eta(\dot{y}) \quad (2)$$

где  $\eta(\dot{y})$ -единичная функция Хевисайда, равная 1 при  $\dot{y} > 0$  и 0 при  $\dot{y} < 0$ .

Подстановка сейсмических ускорений (1) или (2) в одномерное линейное уравнение неконсервативного осциллятора

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \kappa^2 y = -\ddot{U}(t) \quad (3)$$

в котором  $\kappa^2 = K_y/m$ ,  $m$ -масса сооружения,  $K_y$ -коэффициент жесткости,  $y$ -относительное смещение,  $n = \zeta \cdot \kappa$ , где  $\zeta$ -безразмерный коэффициент демпфирования, приводит к нелинейным уравнениям:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \kappa^2 y = A_{\max} \cdot \text{sign}(\dot{y}) \quad (4)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \kappa^2 y = A_{\max} \cdot \eta(\dot{y}) \quad (5)$$

Динамические нелинейные системы (4) и (5), полученные из линейного уравнения (3) введением воздействий (1) и (2) являются потенциально автоколебательными, то есть допускают выход на режим автоколебаний - на стационарные периодические колебания, например [10-11]. Полученные нелинейные уравнения отличаются тем, что для них, кроме приближенных решений, могут быть построены методом припасовывания точные решения не только режима автоколебаний, но и процесса выхода на режим автоколебаний.

Уравнение (5) подробно исследовано в [10] как методом припасовывания, так и с применением рядов Фурье, при изучении периодического процесса со специальной характеристикой, который может происходить в ламповом генераторе. Построено точное решение периодического процесса с периодом свободных колебаний и сделан вывод о том, что при достаточно малом затухании периодический процесс сколь угодно близок к синусоидальному. Это значит, что в колебательной системе возникает авторезонанс, как резонанс под действием силы, порождаемый движением самой системы. Кроме того, уравнение (4) исследовано в работе [8] и представлено в [11], где определена амплитуда автоколебаний. В [8] произведено сопоставление с амплитудой резонансных колебаний уравнения (3) для гармонических входных воздействий  $\ddot{U}(t)$ .

Следует отметить, что неоднородные нелинейные уравнения типа (4) встречаются при использовании систем сейсмоизоляции с применением различных элементов сухого трения [12-14]. Например, в работе [12] в связи с оценкой перемещений зданий с сейсмоизолированным скользящим поясом (ССП) исследовалось уравнение

$$\ddot{y} + f q \cdot \text{sign}(\dot{y}) = q \cdot \sin \omega t \quad (6)$$

типа (4) при нулевой восстанавливающей силе и нулевом демпфировании. Сделан нетривиальный вывод о том, что здание будет двигаться относительно фундамента с остановками и, что при многоуровневом проектировании СПП

может обеспечивать сейсмостойкость сооружения для МРЗ, а для ПЗ необходимы дополнительные антисейсмические мероприятия.

Более общее неоднородное нелинейное уравнение колебаний с учетом сухого трения, ненулевого демпфирования и линейной восстанавливающей силы приведено [13-14] и рассмотрено ранее в [11] с помощью метода гармонического баланса. Найдена амплитуда колебаний в зависимости от соотношения частот и получено условие существования решения.

Сейсмические воздействия (1) и (2) вызывают более интенсивные установившиеся стационарные колебания, чем действительные и могут быть интерпретированы как наиболее сильные землетрясения потенциально возможные на данной площадке. То есть, могут быть отнесены к модели воздействия при генерации аварийных или запредельных сейсмических воздействий. Указанные сейсмические воздействия вызывают аварийную расчетную ситуацию, имеющую малую вероятность возникновения и небольшую продолжительность, но являющейся важной с точки зрения последствий достижения предельных состояний, которые могут возникнуть при этой ситуации и требуемой п.6 статьи 16 Федерального закона №384-ФЗ.

С другой стороны, если использовать средние периоды повторяемости, то требование учета особой (но не аварийной расчетной ситуации), сводится к требованию близости периодов собственных колебаний сооружения к преобладающим периодам колебаний грунта площадки, или их совпадению (резонанс). Особой расчетной ситуацией также является ситуация, когда в многомерной модели самого сооружения или в модели воздействия возникают кратные или близкие частоты.

Наличие кратных корней частотного уравнения не редкий случай и встречается, например, при анализе свободных колебания автомобиля [15]. В этом случае стремятся с помощью конструктивных методов обеспечить кратность частот именно потому, что значительные вынужденные колебания автомобиля могут возникнуть лишь при некоторой единственной частоте возбуждения, а не при двух некратных частотах.

При близости хотя бы двух собственных частот общий закон движения оказывается достаточно своеобразным [15]. В этом случае в представлении общего решения однородной системы уравнений по двум обобщенным координатам выделяются суммы с двумя близкими частотами. Колебание по первой обобщенной координате носит синусоидальный характер с периодически медленно меняющейся амплитудой. Период изменения амплитуды тем больше, чем ближе частоты и такие колебания носят название биений. Движение соответствующее второй обобщенной координате, так же представляет собой биения, но сдвинутые по фазе относительно движения по первой обобщенной координате.

## Расчетные модели воздействия под сооружение

При генерации сейсмических воздействий под сооружение модели воздействий принимаются в виде ограниченного набора осциллирующих функций с частотами опасными для сооружения [6]. Генерация воздействий под сооружение предполагает некоторую аппроксимацию воздействия с рядом неопределенных параметров, которые определяются исходя из близости характеристик синтетического воздействия и акселерограмм прошлых землетрясений.

В варианте, когда сейсмические воздействия генерируются под площадку строительства (без учета особенностей сооружения) используются акселерограммы прошлых землетрясений. Как отмечается в [6] большинство работ, посвященных моделированию воздействий без учета свойств сооружения, принадлежит сейсмологам, которые занимаются генерацией воздействий для площадок строительства, например [16-17].

По [6] второй подход является единственно возможным при типовом проектировании, когда сейсмологические данные о площадке строительства фактически отсутствуют, но он может быть распространен на второй уровень воздействия SL2. При этом модель воздействия для велосиграны представляется, в частности, в виде конечного набора осциллирующих функций

$$\dot{U}(t) = \sum B_k \cdot \exp(-\beta_k t) \cdot \sin(\theta_k t) \quad (7)$$

из которой при дифференцировании по времени следует модель воздействия для ускорений

$$\ddot{U}(t) = \sum \exp(-\beta_k t) \cdot \varphi_k(t), \quad \varphi_k(t) = A_k \sin(\theta_k t + \lambda_k) \quad (8)$$

где  $A_k = B_k V_k$ ,  $V_k^2 = \theta_k^2 + \beta_k^2$ ,  $\text{tg} \lambda_k = -\theta_k / \beta_k$ . В формулах (7)-(8) суммирование производится по всем  $k$  в пределах от 1 до  $K$ , где  $K \geq 1$ ,  $B_k$ ,  $\beta_k$ -параметры модельного воздействия, а частоты  $\theta_k$  принимаются опасными для сооружения. Для линейных уравнений описывающих колебания при схематизации сооружения параметры  $\theta_k$  или их часть представляют собой резонансные частоты. Остальные параметры модельного воздействия должны назначаться так, чтобы характеристики сгенерированного воздействия соответствовали характеристикам реальных землетрясений.

Второй подход, основанный на предложениях о модели воздействия в виде ограниченного набора осциллирующих функций времени с частотами опасными для сооружения является, по существу, определением особых сейсмических нагрузок, когда сейсмические воздействия вызывают особые расчетные состояния конструкций.

Как в работе [6], так и других монографиях, например [4,18] предполагается, что собственные частоты колебаний сооружения, в том числе

с учетом взаимодействия сооружений с основанием, различны и среди них нет ни близких, тем более совпадающих (кратных) частот. Но в работе [19], где рассматривается относительный вклад различных форм собственных колебаний высотного здания в горизонтально-качательные интегральные усилия под подошвой фундамента, обнаружена близость двух собственных частот с разницей между этими частотами менее 10%.

Следовательно, определение особых сейсмических нагрузок следует расширить до включения в набор осциллирующих функций времени типа (7) или (8) близких или кратных частот модельного воздействия. Более того, следует ввести особые состояния сооружений, когда возникают кратные или близкие собственные частоты в модели самого сооружения.

### Кратные корни в моделях сейсмического воздействия

В случае  $K=1$  из (8) следует формула для сейсмических ускорений грунта

$$\ddot{U}(t)=A \cdot \exp(-\beta t) \cdot \sin(\theta t+\lambda) \quad (9)$$

Для  $K=2$  в представлении (8) для генерации расчетных воздействий выделяется слагаемое

$$\ddot{U}(t)=[A_1 \cdot \exp(-\beta_1 t) \cdot \sin(\theta_1 t+\lambda_1)+A_2 \cdot \exp(-\beta_2 t) \cdot \sin(\theta_2 t+\lambda_2)] \quad (10)$$

Для двухкомпонентного воздействия (10), где амплитуды  $A_{1,2}$  не зависят от частот  $\theta_{1,2}$  при  $\lambda_1=\lambda_2$  и  $\beta_1=\beta_2$  возникают затухающие биения основания в случае близости частот  $\theta_{1,2}$  и колебания основания в виде (9) при совпадении частот  $\theta_1=\theta_2$  где  $A=A_1+A_2$ .

Иные выводы получаются, если в (10) коэффициенты  $A_{1,2}$  зависят от частот  $\theta_{1,2}$ . Например, если положить  $A_1=A_2=q \cdot A_u$ , где  $q=(\theta_1^2+\theta_2^2)/(\theta_1^2-\theta_2^2)$ , то переходя к пределам при  $\theta_2 \rightarrow \pm \theta_1$  и обозначая  $\theta_1=\theta$  получим

$$\ddot{U}=A_u \cdot \theta t \cdot \cos(\theta t) \cdot \exp(-\beta t) \quad (11)$$

Если в формуле (8) для сейсмических колебаний грунта взять три слагаемых и положить  $A_1=A_2=q \cdot A_u$ ,  $A_3=A_u$ ,  $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$  и  $\theta_3=\theta_2$  то получим формулу

$$\ddot{U}=A_u \cdot \exp(-\beta t)[q \cdot (\sin(\theta_1 t)+\sin(\theta_2 t))+\sin(\theta_2 t)] \quad (12)$$

Переходя в этой формуле к пределам при  $\theta_2 \rightarrow \pm \theta_1$  получим

$$\ddot{U}=A_u \cdot \exp(-\beta t)(\theta t \cdot \cos \theta t \pm \sin \theta t) \quad (13)$$



Следует заметить, что первое слагаемое в формуле (13) для ускорения основания совпадает с формулой (11).

### Аппроксимация колебаний грунта

Обобщение представлений (7) и (8) или, что то же самое, модели воздействия в виде конечного набора осциллирующих функций, возможно на основе применения решений однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами четного порядка  $n=2N$

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \quad (14)$$

с правой частью вида

$$f(t)=\exp(\alpha t) \cdot [P_m^1(t) \cdot \cos\beta t + P_m^2(t) \cdot \sin\beta t] \quad (15)$$

где  $x^{(n)}$  означает производную степени  $n$  по времени, а  $P_m^1(t)$  и  $P_m^2(t)$  полиномы степени  $m$ .

Частное решение этого уравнения, описывающее колебания основания, можно найти в форме [20-21]

$$x(t)=t^r \cdot \exp(\alpha t) \cdot [Q_m^1(t) \cdot \cos\beta t + Q_m^2(t) \cdot \sin\beta t] \quad (16)$$

Здесь  $Q_m^1(t)$  и  $Q_m^2(t)$  многочлены той же степени, что и  $P_m^1(t)$  и  $P_m^2(t)$  (или наибольшей, если эти степени неравны),  $r \geq 0$  есть кратность корня  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$  характеристического уравнения  $L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ .

В случае, если характеристический многочлен  $L(\lambda)$  имеет некрратные комплексные корни  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , то общее решение однородного уравнения (14) имеет вид квазимногочлена

$$x(t)=f_1(t) \cdot \exp(\lambda_1 t) + f_2(t) \cdot \exp(\lambda_2 t) + \dots + f_m(t) \cdot \exp(\lambda_m t) \quad (17)$$

где  $n=m$  и  $f_i$  – постоянные величины,  $i=1,2,\dots,n$ . Если характеристический многочлен однородного уравнения (14) имеет кратные корни  $\lambda_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$ , причем корень  $\lambda_j$  имеет кратность  $k_j$  так, что

$$L(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda-\lambda_m)^{k_m} \quad (18)$$

где  $k_1+k_2+\dots+k_m=n$ , то у квазимногочлена (17) все  $f_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$  будут многочленами степени  $k_i-1$  с произвольными коэффициентами. Число произвольных постоянных в выражении (17) равно  $n$ , где  $n=k_1+k_2+\dots+k_m$ , т.е. порядку уравнения.

Учитывая, что каждое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, а частные решения неоднородного дифференциального уравнения (14) при правой части типа (15) также являются квазимногочленами, будем считать, что ускорение колебаний грунта площадки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (14) с четным  $n$  и соответствующими начальными условиями при  $t=0$ , где  $x=\ddot{U}$ .

От дифференциального уравнения (14) требуется, чтобы многочлен  $L(\lambda)$  был устойчивым, т.е. все его корни должны быть комплексными и имели отрицательные действительные части. Вопрос об устойчивости многочлена произвольной степени  $n$  определяется хорошо известными условиями Рауса-Гурвица, например [20–22].

В случае комплексных кратных и некратных корней характеристического уравнения выражение (17) неудобно, так как оно является комплексной функцией действительного переменного  $t$ . Ввиду того, что комплексные корни дифференциального уравнения четного порядка  $n=2N$  входят попарно сопряженными с одинаковой кратностью  $k_r$ , то отделяя в каждой строке (17) действительные части от мнимых получим при  $t \geq 0$  действительное выражение:

$$\ddot{U}(t) = \sum f_j(t) \cdot \exp(\beta_j t) \cdot \cos(\theta_j t + \gamma_j) \quad (19)$$

обобщающее представления колебаний в виде (8) в котором  $\beta_j = \text{Re}(\lambda_j)$ ,  $\theta_j = \text{Im}(\lambda_j)$ .

В заключение в работе [6] указывается, что принятая для анализа модель воздействия типа (7) оказалась недостаточной для точного обеспечения требуемых характеристик воздействия, в связи с чем следует переходить на уточненные модели воздействия. Такой уточненной моделью при генерации воздействия под площадку строительства и под сооружение может служить воздействие в виде квазимногочлена (19) с полиномами  $f_j(t)$  не сводящимися, в общем случае, к постоянным величинам.

Указанные выше выводы относительно аппроксимации колебаний грунта можно получить, применяя к уравнению (14) с нулевыми начальными условиями преобразование Лапласа.

Первый случай: все нули  $\lambda_j$  различны.

Тогда для изображения  $X(s)$  функции  $x(t)$  из (14) получается выражение

$$X(s) = F(s) \cdot G(s), \quad G(s) = 1/L(s)$$

где  $F(s)$  – изображение правой части  $f(t)$ .

В случае нулевых начальных условий и ненулевой правой части разлагая изображение  $X(s)$  на простейшие дроби получим

$$X(s)=D_1/(s-\lambda_1)+D_2/(s-\lambda_2)+\dots+D_n/(s-\lambda_n)$$

в котором постоянные  $D_j$  определяются формулами  $D_j=F(\lambda_j)/L'(\lambda_j)$ ,  $j=1,2,\dots,n$ . Для нулевой правой части и начальных условий

$$x^{(n-1)}(0)=0, x^{(n-2)}(0)=0, x'(0)=x'_0, x(0)=x_0 \quad (20)$$

функция  $F(s)$  находится по формуле

$$F(s)=x_0(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\dots+a_{n-1})+x'_0(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\dots+a_{n-2}) \quad (21)$$

Второй случай: среди нулей  $\lambda_j$  имеются равные.

В этом случае некоторые нули являются кратными и пусть корень  $\lambda_v$  имеет кратность  $k_v \geq 1$ . Если, как и выше, обозначить различные нули через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  то разложение многочлена  $L(s)$  на линейные множители будет иметь вид (18).

Теперь, при разложении  $X(s)$  на простые дроби нулю  $\lambda_v$  будет соответствовать не одна единственная дробь с величиной  $s-\lambda_v$  в знаменателе, а  $k_v$  дробей с величинами  $(s-\lambda_v)$ ,  $(s-\lambda_v)^2, \dots, (s-\lambda_v)^{k_v}$ . В результате в качестве решения будем иметь функции (17) и квазимногочлен (19) составленный из этих функций, в котором функции  $f_v(t)$  представляют собой многочлены степени  $k_v-1$ .

Следовательно, при описании колебаний основания уравнением типа (14) правая часть должна быть отлична от нуля и представлена квазимногочленом (19) в котором могут присутствовать кратные корни. В случае  $n \geq 4$  кратные корни могут возникать в однородном уравнении (14) решение которого может быть также представлено в виде квазимногочлена (19). Возможность описания колебаний основания однородным уравнением (14) в котором  $f(t)=0$  следует также из того, что если  $f(t)$  представляет собой квазимногочлен типа (15), то решение неоднородного уравнения (14) также имеет вид квазимногочлена (16) с более высокой степенью входящих многочленов за счет кратности корней.

Обе модели воздействия представляют собой обратные задачи для дифференциального уравнения (14) с правой частью в виде (15) и соответствующими начальными условиями. То есть, имея ряд наблюдений  $\{\ddot{U}_0(t_i)\}$  за колебаниями основания в виде оцифровок сейсмического воздействия, требуется определить начальные условия, параметры  $a_k$  уравнения (14) и параметры вынуждающей функции в правой части уравнения. При этом параметры  $a_k$  подчинены ряду ограничений, связанных с устойчивостью многочлена  $L(\lambda)$  и наличием кратных корней.

Указанная обратная задача сводится к задаче аппроксимации ряда наблюдений  $\{\ddot{U}_0(t_i)\}$  с помощью модельного воздействия (19), включая в число определяемых слагаемых, число  $m$  и кратности корней (степени полиномов  $f_j(t)$ ). В случае модели воздействия под сооружение часть или все

частоты  $\theta_j$  заранее известны, что существенно облегчает задачу аппроксимации. Облегчение связано с тем, что в методе наименьших квадратов параметры, линейно входящие в аппроксимационную формулу, определяются отдельно из системы линейных уравнений, а нелинейно входящие параметры находятся сначала из экстремума некоторой нелинейной функции этих параметров и определяют коэффициенты системы линейных уравнений. В дополнение укажем, что решить обратную задачу можно с помощью методов квазилинеаризации, развитых в [23].

В работе [6] для решения обратной задачи используются три типа характеристик сейсмических воздействий: кинематические (PGA и коэффициент гармоничности  $\kappa$ ), спектральные (спектры или преобладающие частоты) и энергетические (интенсивность по Ариасу  $I_A$ , абсолютная кумулятивная скорость CAV и плотность сейсмической энергии SED).

При этом авторы уходят от формулировки обратной задачи как задачи нелинейного программирования, когда достигается экстремум разности одной из характеристик при равенстве остальных характеристик, вычисленных по записям колебаний основания в виде ускорения или скорости. Предпочтение при генерации воздействия отдается экстремальной задаче, когда минимизируется погрешность, представляющая собой линейную комбинацию, состоящую из некоторых весовых коэффициентов умноженных на соответствующую разность теоретических и вычисленных характеристик.

Хорошо известно, что обратные задачи некорректны, что в данном случае оборачивается неединственностью экстремума нелинейной функции, которая и отмечена в работе [6]. Регуляризация алгоритма решения обратной задачи представляет собой выбор локального экстремума, так как абсолютного экстремума, как правило, не существует.

### **Простейшие уравнения колебаний «сооружение–опорный слой»**

Для случая  $n=2$  уравнение (14) принимает вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \kappa^2 x = -\ddot{U}_0(t), \quad (22)$$

в котором  $\ddot{U}_0 = h\delta(t) + V_0(t)$ , а  $V_0(t)$  представляет собой квазимногочлен типа (19). Круговая частота  $\kappa$ , безразмерный коэффициент демпфирования  $\xi$  и параметры квазимногочлена  $V_0(t)$  определяются, в общем случае, на основе решения обратной задачи для уравнения (22). В этом случае имеется только одна собственная круговая частота  $\kappa$  недемпфированных колебаний, и круговая частота  $\phi$  с учетом затухания,  $\phi^2 = \kappa^2 - \varepsilon^2$ , причем  $\varepsilon = \xi \cdot \kappa$ . Одномерное уравнение горизонтальных колебаний сооружения имеет вид (3). Это уравнение, как и уравнение горизонтальных колебаний основания (22), не имеет кратных корней.

Уравнение (22), интерпретируемое как горизонтальные колебания опорного слоя, совместно с линейным уравнением (3) горизонтальных

колебаний сооружения записанное при отсутствии угловых колебаний, описывает колебания системы «сооружение-опорный слой», если положить  $\ddot{U}(t)=-\kappa^2x(t)$ , т.е.

$$\ddot{y}+2n\dot{y}+\kappa^2y=\kappa^2x, \quad \ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+\kappa^2x=-\ddot{U}_0(t) \quad (23)$$

В этой колебательной системе есть влияние колебаний опорного слоя на колебания сооружения, но нет обратного влияния колебаний сооружения на колебания опорного слоя. Но в подавляющем большинстве случаев ответственные сооружения в силу своих характеристик (большой массы, жесткости, заглубления и т. п.) меняют сейсмические колебания основания по сравнению с теми, которые были в отсутствие сооружения в тех же точках и при таком же сейсмическом воздействии [18].

Учет динамического взаимодействия сооружений с основанием, когда при горизонтальных колебаниях основания масса сооружения перемещается по горизонтали без поворота вокруг горизонтальной оси, в простейшем случае может быть осуществлен различными способами. Например, как колебания системы с двумя степенями свободы, приведенными в работе [24], но в данной работе рассматриваются только совместные колебания системы уравнений (23).

### **Решения уравнений совместных колебаний при генерации сейсмических воздействий под сооружение**

Применяя преобразование Лапласа к базовым уравнениям (23) и обозначая через  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $F(s)$  изображения функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $-\ddot{U}_0(t)$  получим следующие изображения

$$X(s)=(x_0(s+2\varepsilon)+\dot{x}_0+F(s))/((s+\varepsilon)^2+\phi^2) \quad (24)$$

$$Y(s)=(y_0(s+2n)+\dot{y}_0)/((s+n)^2+\omega^2)+\kappa^2X(s)/((s+n)^2+\omega^2) \quad (25)$$

где  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$  и  $y_0$ ,  $\dot{y}_0$  начальные значения положения и скоростей опорного слоя и сооружения при  $t=0$ ,  $\omega$ -круговая частота демпфированных колебаний,  $\omega^2=\kappa^2-n^2$ .

Если применяются совместные уравнения колебаний «сооружение-опорный слой» в виде (23), то в случае генерации воздействия под сооружение могут совпадать частоты их собственных колебаний  $\kappa=\kappa$  если внешнее воздействие сводится к ненулевым начальным условиям для опорного слоя. В случае равенства коэффициентов демпфирования  $\varepsilon=n$  при совпадении частот  $\kappa=\kappa$  должны также совпадать круговые частоты с учетом демпфирования, т.е. должно быть  $\phi=\omega$ .

Изображения колебаний  $x, y$  в данном случае даются формулами (24)-(25) в которых  $\varepsilon=n$  и  $\phi=\omega$ . Из этих формул при отсутствии внешнего воздействия ( $F(s)=0$ ) и ненулевой начальной скорости основания

$$x_0=y_0=\dot{y}_0=0, \dot{x}_0 \neq 0 \quad (26)$$

следуют изображения

$$X(s)=\dot{x}_0/((s+\varepsilon)^2+\phi^2), Y(s)=\kappa^2\dot{x}_0/((s+\varepsilon)^2+\phi^2)^2 \quad (27)$$

Кроме того, при наличии внешнего импульсного воздействия  $\ddot{U}_0=h \cdot \delta(t)$  и нулевых начальных условий  $F(s)=-h$  и из (24)-(25) следуют изображения (27) в которых  $\dot{x}_0=-h$ .

Оригиналом изображений (27) служат формулы для резонансных колебаний основания и сооружения

$$x(t)=A \cdot \exp(-\varepsilon t) \cdot \sin(\phi t), y(t)=\kappa^2 A \cdot \exp(-\varepsilon t) (\sin \phi t - \phi t \cdot \cos \phi t) / (2\phi^2) \quad (28)$$

в которых  $A = \dot{x}_0/\phi$ . Вторая из этих формул получена ранее в виде (13) из трехчленного представления для ускорений основания при совпадении частот.

Для амплитуды колебания  $x(t)$  максимум достигается при  $t=0$  и равен

$$x_{\max} = A \cdot q \cdot \exp(-\tau_0/q) / (1+q^2)^{1/2}, q = \phi / \varepsilon \quad (29)$$

Полагая логарифмический декремент колебаний  $\delta_3$  равным 0.3, получим  $q=20.94$  ( $\varepsilon=0.048\phi$ ). Для этого значения параметров максимальное значение достигается в начальной стадии и смещение равно  $x_{\max}=0.929A$ .

Нули и экстремумы смещений  $y(t)$  из (28) определены в работе [24] где, в частности, показано, что экстремумы смещения  $y(t)$  определяются корнями уравнения  $\operatorname{tg}t = \tau(1-qt)$ ; при  $q=0$  это уравнение превращается в уравнение  $\operatorname{tg}t = \tau$  определяющее нули смещения  $y(t)$ .

Корни этого уравнения вычислены для  $q=20.94$  ( $\varepsilon=0.048\phi$ ) равно как и экстремальные смещения  $y(t)$ . Экстремальные смещения  $y(t)$  из (28) в резонансном случае по абсолютной величине сначала возрастают, достигая максимума, а затем начинают убывать, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Отрицательные экстремальные смещения  $y(t)$  сначала убывают достигая минимума  $y_{\min} = -3.85 \square / \phi^2$ , при  $\tau=21.94$  где, теперь,  $A = \kappa^2 \dot{x}_0 / \phi$ , а потом начинают возрастать, оставаясь отрицательными. Положительные экстремальные смещения сначала возрастают, достигая максимума  $y_{\max} = 3.83A/\phi^2$  при  $\tau=18.8$ , а затем начинают убывать, оставаясь положительными.

Если на колебательную систему (23) действует внешнее воздействие

$$\ddot{U}_0(t) = -A \cdot \exp(-\beta t) \cdot \sin \theta t \quad (30)$$

а начальные смещения и скорости нулевые, то изображения смещений  $x, y$  даются формулами (24)-(25) в которых  $F(s)=A\theta/((s+\beta)^2+\theta^2)$ .

В общем случае уравнений (23) возможны три варианта особых состояний. Первый вариант особых состояний колебательной системы «опорный слой-основание», рассмотренный выше при импульсном воздействии на основание и не предусмотренный в [6] это совпадение частот колебаний основания и сооружения  $k=\kappa$  и, для простоты, совпадение параметров затухания  $\varepsilon=n$ , т.е.  $\phi=\omega$ . Здесь частота  $\theta$  внешнего воздействия в общем случае не совпадает с частотой  $\phi$  колебаний основания и сооружения и при  $\theta=\phi$  возникает случай резонанса, также не предусмотренный в [6].

Изображения колебаний сооружения и основания в данном варианте даются формулами

$$X(s)=A\theta/(((s+\varepsilon)^2+\phi^2)\cdot((s+\beta)^2+\theta^2)), Y(s)=Ak^2\theta/(((s+\varepsilon)^2+\phi^2)^2\cdot((s+\beta)^2+\theta^2)) \quad (31)$$

которые в случае резонанса  $\theta=\phi$  и  $\beta=\varepsilon$  превращаются в изображения

$$X(s)=A\phi/((s+\varepsilon)^2+\phi^2)^2, Y(s)=Ak^2\phi/((s+\varepsilon)^2+\phi^2)^3 \quad (32)$$

Второй и третий варианты особых состояний колебательной системы, предусмотренные в [6] это совпадение частоты  $\theta$  внешнего воздействия с частотой  $k$  колебаний основания или с частотой  $\kappa$  колебаний сооружения, когда  $k\neq\kappa$ .

Оставляя второй и третий варианты особых колебаний системы в стороне, найдем колебания сооружения и основания для первого варианта, когда  $\omega=\phi=\theta$ , изображения которых даются формулами (31)-(32).

Разлагая изображение  $X(s)$  из (31) на простые дроби получим, что оригинал изображения  $X(s)$  представляет собой затухающие квазипериодические колебания

$$x(t)=A\theta[\theta^{-1}\cdot\exp(-\beta t)\sin\theta t-\phi^{-1}\cdot\exp(-\varepsilon t)\sin\phi t]/(\phi^2-\theta^2) \quad (33)$$

Эти выражения для колебаний опорного слоя сводятся к существенно более простым формулам при  $\varepsilon=\beta$ , т.е. в этом случае выражение для колебаний существенно упрощается и записывается в виде

$$x(t)=A((\sin\theta t-(\theta/\phi)\sin\phi t)/(\phi^2-\theta^2))\cdot\exp(-\varepsilon t) \quad (34)$$

В случае, когда частота вынужденных колебаний  $\theta$  близка к частоте  $\phi$ , колебание  $x(t)$  опорного слоя сводится к затухающим биениям.

При  $\theta\rightarrow\phi$  и  $\varepsilon>0$  возникает резонанс колебаний и решение (34) принимает вид неперриодических резонансных вынужденных затухающих колебаний

$$x(t)=A\cdot\exp(-\varepsilon t)(\sin\phi t-\phi t\cdot\cos\phi t)/(2\phi^2) \quad (35)$$

которые совпадают со второй формулой (28) при  $\kappa^2 \dot{x}_0 / \phi = A$ .

Это означает, что основание сооружения при воздействии на колебательную систему приведенной выше сейсмической нагрузки (30) движется аналогично колебаниям сооружения при отсутствии внешнего воздействия, но при ненулевой начальной скорости основания.

Разлагая второе изображение  $Y(s)$  колебаний сооружения из (31) при  $\beta = \varepsilon$  на простые дроби получим оригинал  $y(t)$  в нерезонансном случае

$$y(t) = A\kappa^2 \theta \cdot \exp(-\varepsilon t) [y_\theta(t) + y_\phi(t)] / (\phi(\phi^2 - \theta^2)) \quad (36)$$

в котором

$$y_\theta(t) = (\phi \cdot \sin \theta t - \theta \cdot \sin \phi t) / (\theta(\phi^2 - \theta^2)), \quad y_\phi(t) = (\phi t \cdot \cos \phi t - \sin \phi t) / (2\phi^2) \quad (37)$$

В резонансном случае переходя к пределу при  $\theta \rightarrow \phi$  в функции  $y_\theta(t)$  получим  $\lim y_\theta(t) = -y_\phi(t)$ , т.е. числитель и знаменатель правой части (36) обращаются в нуль. Переходя к пределу при  $\theta \rightarrow \phi$  в функции  $y(t)$  из (36) найдем, что в резонансном случае

$$y(t) = -A\kappa^2 \cdot \exp(-\varepsilon t) (\phi^2 t^2 \cdot \sin \phi t + 3\phi t \cdot \cos \phi t - 3\sin \phi t) / (8\phi^4) \quad (37)$$

Нули смещения (37) определяются моментами собственного времени  $\tau$  для которых имеет место уравнение  $\operatorname{tg} \tau = 3\tau / (3 - \tau^2)$ . Экстремумы смещения сооружения находятся для моментов собственного времени удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{tg} \tau = -\tau(3 - q\tau) / (\tau^2 + q - 3) \quad (38)$$

Вычисляя корни этого уравнения при  $q = 20.94$  ( $\varepsilon = 0.048\phi$ ) с помощью итерационной процедуры к последовательности уравнений

$$\tau = \arctg((\tau(q\tau - 3) / (\tau^2 + q - 3)) + m\pi), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

найдем значения собственного времени  $\tau$  для которых достигаются величины экстремальных смещений, вычисленных по формуле (37).

Ряды вычисленных экстремальных положительных и отрицательных смещений здесь, как и для смещений основания по формуле (35) показывают наличие единственного положительного максимума и единственного отрицательного минимума.

Основание и сооружение в случае резонанса и при совпадения частот демпфированных колебаний, колеблются несинхронно при нулевых начальных условиях. При этом, как колебания основания, так и колебания сооружения имеют по единственному положительному максимуму и отрицательному минимуму, достигаемому в различные моменты времени.

Ранее было отмечено, что подход, предложенный в [6] и основанный на модели воздействия в виде набора осциллирующих функций (7) с частотами, опасными для сооружения является, по существу,



определением особых сейсмических нагрузок, вызывающих особые расчетные состояния сооружений.

Это определение особых сейсмических нагрузок, вызывающих особые расчетные состояния элементов сооружений типа резонанса по какой либо степени свободы либо по всем сразу, было расширено как модель воздействия в виде квазимногочлена (19), содержащего набор произведения осциллирующих функций на многочлены  $f_j$  от времени  $t$ . При этом многочлены  $f_j$  появляются вследствие наличия кратных частот в дифференциальном уравнении (14) четного порядка  $n \geq 2$  описывающего колебания основания.

В случае несовпадения частот сейсмического воздействия с собственными частотами сооружения особым состоянием колебаний сооружения будет наличие кратных собственных частот или близость собственных частот в модели самого сооружения.

### Двумерные колебания при аварийных сейсмических нагрузках

Аварийной расчетной ситуацией в случае двумерных колебаний системы будет ситуация, описываемая нелинейными уравнениями (23), в которых  $\ddot{U}_0(t) = -A_{\max} \cdot \text{sign}(\dot{x})$ , т.е. уравнениями

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \kappa^2 y = \kappa^2 x, \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \kappa^2 x = A_{\max} \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (39)$$

Для первого типа землетрясений, когда происходит движение грунта почти точно в одном направлении, причем в одну сторону более сильное, чем в другую, в качестве аварийного воздействия на колебательную систему (23) можно выбрать  $\ddot{U}_0(t) = -A_{\max} \cdot \eta(\dot{x})$ .

Исследование аварийных ситуаций, когда в уравнениях движения (39), а также аварийных ситуаций, когда в правых частях стоит функция единичного скачка  $\eta(\dot{x})$  вместо  $\text{sign}(\dot{x})$ , является предметом отдельной работы, равно как и при многомерной схематизации зданий и сооружений.

Здесь же отметим, что уравнение колебаний основания в формулах (39) допускает выход на режим автоколебаний - стационарный периодический процесс  $x(t)$  с периодом  $T_\phi = 2\pi/\phi$  собственных колебаний однородного уравнения и амплитудой  $A_\phi = (A_{\max}/\kappa^2) \cdot \text{ctg}(\pi\varepsilon/2\phi)$  [8]. При этом режим автоколебаний может быть представлен в виде аналитического выражения различного в двух полупериодах  $0 < t < \pi/\phi$  и  $\pi/\phi < t < 2\pi/\phi$  или в виде ряда

$$x(t) = (4A_{\max}/\pi) \sum (a_n \cdot \cos(n\phi t) + b_n \cdot \sin(n\phi t))$$

в котором суммирование производится по всем  $n=1,2,\dots$ . Здесь коэффициенты с четными номерами равны нулю, а коэффициенты с

нечетными номерами представлены довольно громоздкими выражениями и здесь не приводятся.

Основной резонансный тон внешней силы порождает основной тон колебания, причем квадрат амплитуды этого тона равен  $R_1=1/((\kappa^2-\phi^2)^2+4\varepsilon^2\phi^2)$ ,  $\phi^2=\kappa^2-\varepsilon^2$ , и неограниченно растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Остальные члены разложения внешней силы имеют частоты, далекие от резонанса и поэтому порождают движение, для которого сумма квадратов коэффициентов ряда Фурье при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к конечному положительному пределу.

Это означает, что при достаточно малом  $\varepsilon$  периодическое движение основания имеет сколь угодно малый клирфактор и его колебания сколь угодно близки к синусоидальным

$$x(t) = Q_0 \cdot \sin(\phi t - q), \quad \operatorname{tg} q = 2\phi/\varepsilon, \quad Q_0 = (4A_{\max}R_1/\pi). \quad (40)$$

Другими словами, в задаче о вынужденных колебаниях основания под воздействием аварийной нагрузки и при достаточно малом коэффициенте демпфирования  $\varepsilon$  получаем авторезонанс под действием ускорения, порождаемого движением самого основания.

Уравнение колебаний сооружения при выходе колебаний основания на авторезонанс приближенно описывается первым уравнением (39) при вынуждающей силе определяемой выражением (40). Решение этого уравнения хорошо известно, но ввиду того, что его правая часть определена в неограниченном интервале  $-\infty < t < \infty$ , решение можно построить с применением обобщенного преобразования Фурье, имея в виду, что спектральная плотность  $F(s)$  колебания  $f(t) = \exp(\pm i\phi t)$  с круговой частотой  $\phi$  представляет собой  $\delta$ -функцию,  $F(s) = \delta(s \pm \phi)$ , где  $s$  вещественная переменная.

Применяя к первому уравнению (39) в котором в правой части стоит автоколебание (40) для изображения Фурье  $Y(s)$  получим выражение

$$Y(s) = [Q_1\delta(s-\phi) + Q_2\delta(s+\phi)] \cdot G(is) \quad (41)$$

в котором  $Q_1 = Q \cdot \exp(-iq)/(2i)$ ,  $Q_2 = -Q \cdot \exp(iq)/(2i)$ ,  $Q = \kappa^2 Q_0$ ,  $G(is)$  – частотная характеристика,  $G(is) = (\kappa^2 - s^2 + i2ns)$ . Обращение преобразования Фурье приводит к выражению для  $y(t)$  в комплексной форме  $y(t) = Q \cdot \operatorname{Im}(G(i\phi) \cdot \exp(i(\phi t - q)))$ . Выделяя мнимую часть в этом выражении, получаем окончательно

$$y(t) = D \cdot Q \cdot \sin(\phi t - q_1) \quad (42)$$

где  $q_1 = q - r_0$ ,  $\operatorname{tg} r_0 = 2n\phi/(\kappa^2 - \phi^2)$ ,  $D = ((\kappa^2 - \phi^2)^2 + 4n^2\phi^2)^{1/2}$ . При этом, если амплитуда автоколебания основания составляет величину  $Q_0$  то амплитуда колебаний сооружения при выходе колебаний основания на режим автоколебаний будет равна величине  $D \cdot Q_0 \kappa^2$ , т.е. возрастает в  $D \cdot \kappa^2$  раз.

Здесь отметим, что режим колебаний (42) сооружения можно элементарно получить путем применения преобразования Лапласа для первого уравнения (39) с начальными условиями и выражением (40) для автоколебаний основания. Решение будет содержать сумму колебаний переходного процесса и установившегося состояния колебательной системы. По истечении некоторого промежутка времени после возбуждения колебаний переходный процесс исчезает и остается установившейся процесс (42), который, не будучи полным решением, передает только асимптотическое поведение колебательной системы.

Для расчета вынужденных сейсмических колебаний при многомерной схематизации зданий и сооружений [1,4,18] для решения линейной системы уравнений наряду с методами прямого пошагового интегрирования и разложения движения по собственным формам (метод модальной суперпозиции), может применяться расчет в частотном диапазоне, если под ним понимать применение преобразования Фурье к этим уравнениям для построения асимптотического решения колебательной системы, которое, игнорируя переходный процесс, передает только асимптотическое поведение решения.

Здесь, также, при многомерной схематизации зданий и сооружений можно применить преобразование Лапласа к системе линейных уравнений с учетом начальных условий, тем более, что важную роль в начальной стадии землетрясения играют собственные колебания, игнорируемые асимптотическим методом.

Одним из преимуществ преобразования Лапласа по сравнению с классическим методом решения дифференциальных уравнений и применением преобразования Фурье (в частотном диапазоне по [18]), является автоматический учет начальных значений [25]. Это преимущество особенно выгодно проявляется в тех случаях, когда коэффициенты системы уравнений движения и возбуждающие функции не остаются неизменными при  $t > 0$ , а скачкообразно меняются, как только одна из неизвестных становится больше или меньше некоторых определенных значений, а также в ряде других случаев.

Так происходит, например, если происходят подряд два или более землетрясения с некоторым промежутком времени между ними, когда колебания, вызванные предыдущим землетрясением, еще не затихли. Ситуация, связанная со скачкообразными изменениями параметров колебательных систем, возникает при применении систем сейсмоизоляции для защиты от землетрясений различных сооружений, в том числе ответственных и уникальных зданий, например [26].

И, наконец, ситуацией, связанной со скачкообразными изменениями возбуждающих функций и приводящей к нелинейным уравнениям вида (39), является возникновение острого резонанса, когда модельное землетрясение вызывается сейсмической силой, постоянной по

модулю и меняющей знак на противоположный при экстремальных значениях смещений сооружения.

Построение точного решения уравнений типа (39) или более общих уравнений, требует припасовывания начальных условий нового движения к тому конечному состоянию, в которое привело предшествующее движение [10]. Это конечное состояние характеризуется нулевой скоростью и экстремальными смещениями основания, которые при смене движения должны быть непрерывными. К этой процедуре построения точного решения нелинейных уравнений вполне применимо преобразование Лапласа за счет автоматического учета начальных значений.

Таким образом, асимптотический метод построения решений линейных дифференциальных уравнений при многомерной схематизации зданий и сооружений при обычных и особых сейсмических воздействиях может быть применен и для нелинейных дифференциальных уравнений с аварийными сейсмическими воздействиями, когда колебания основания вызываются нагрузками типа (1) или (2).

### **Предложения по трехуровневому воздействию для ответственных и уникальных зданий и сооружений**

Наличие в мировой практике двух принципиально разных подходов к генерации сейсмических воздействий под площадку строительства и под сооружение, а также введение острого резонанса в работе [7], позволяют при пересмотре российских норм сейсмостойкого строительства ставить вопрос о нескольких уровнях воздействия с уточнением их содержания на одно и то же сооружение, как в гражданском строительстве, так и в атомной энергетике.

Смысл нескольких уровней воздействия в атомной энергетике заключается в том, что одно и то же сооружение рассчитывается по [5] на разные интенсивности (связанные с периодом повторяемости) воздействия. Вопрос о многоуровневом воздействии определяется наличием у одного и того же сооружения разных предельных состояний по которым выставляются с точки зрения интенсивности воздействия, требования сейсмостойкости.

В атомной энергетике [4,18] приняты три уровня воздействия - ПЗ или землетрясение уровня SL1 с повторяемостью раз в 100 лет; МРЗ или землетрясение уровня SL2 с повторяемостью раз в 10000 лет; запроектное воздействие SL2.

В гражданском строительстве одно сооружение обычно рассчитывается на один уровень сейсмического воздействия, но этот уровень зависит от ответственности сооружения. Применение различных карт с разными периодами повторяемости не означает многоуровневого воздействия - происходит распределение сооружения по разным картам в зависимости от функций и ответственности [2].

Современные ответственные и уникальные гражданские сооружения по многим параметрам, таким, как размер, масса, приближаются

к ответственным сооружениям АЭС. В связи с этим, возникает вопрос о необходимости учета взаимодействия сооружений с основанием (SSI) и о трехуровневом воздействии SL1 - SL3 как и для ответственных сооружений АЭС, но с измененными уровнями воздействий SL2, SL3.

Первый уровень - SL1 соответствует РЗ, интенсивность воздействия которого принимается с учетом положений СП [1] по картам общего сейсмического районирования, и в необходимых случаях - с учетом сейсмического микрорайонирования. Целью расчетов на воздействие РЗ является определение (принятие) проектных решений, позволяющих предотвратить частичную потерю эксплуатационных свойств сооружением.

Второй уровень - SL2 соответствует МРЗ, интенсивность которого, в отличие от [5], принимается в соответствии с методами генерации сейсмических воздействий под сооружение, т.е. с частотами модельного воздействия, опасными (резонансными) для сооружения. При этом в виде конструктивных требований к сооружению допускается наличие особой расчетной ситуации, когда в многомерной модели самого сооружения присутствуют кратные или близкие частоты, приводящие, в частности, к (затухающим) биениям. Целью расчетов на МРЗ является оценка общей устойчивости, неизменяемости, однородности конструкций сооружения, допустимость уровня ускорений, перемещений, скоростей в элементах здания, сооружения, способность конструкции здания к перераспределению внешнего сейсмического воздействия за счет формирования пластических шарниров и иных нелинейных эффектов, например, образования устойчивых хрупких, квазихрупких или вязких трещин.

Третий уровень - SL3 соответствует запредельному уровню ЗРЗ, интенсивность которого соответствует острому резонансу, вызываемому нагрузками (1) или (2). Целью расчетов на ЗРЗ является предотвращение глобального обрушения сооружения или его частей, создающего угрозу безопасности людей и (или) окружающей среде.

## Литература

1. СП 14.13330.2018 «СНиП II-7-81\* Строительство в сейсмических районах».
2. Тяпин А.Г., Наумкин А.В. Проектное и максимальное расчетные сейсмические воздействия. Нормальные и аномальные соотношения // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №2. С.9-15.
3. Изменение №1 к СП 14.13330.2018 «СНиП II-7-81\* Строительство в сейсмических районах». Редакция 1.
4. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. С.-Пб.: Наука. 1998. 256 с.
5. Тяпин А.Г. Некоторые соображения о нормах нового поколения. Часть I: общие положения и задание сейсмического воздействия // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №5. С.7-14.

**6.Смирнова Л.Н., Уздин А.М., Прокопович С.В.** Некоторые особенности моделирования расчетных акселерограмм // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №1.С.33-41.

**7.Леонов М.Я.** Острый резонанс за пределом упругости при сейсмических колебаниях простейших сооружений // Известия АН Киргизской ССР. 1974. №5.С.61-66.

**8.Ведяков И.И., Востров В.К.** Аварийные расчетные ситуации и аварийные сейсмические нагрузки // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016. №5.С.33-38.

**9.Ньюмарк Н., Розенблюэт Э.** Основы сейсмостойкого строительства. М.: Стройиздат. 1980. 344 с.

**10.Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Е.** Теория колебаний. М.: Наука.1981. 568 с.

**11.Магнус К.К.** Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир. 1982. 304 с.

**12.Давыдова Г.В., Ермошин А.А., Уздин А.М., Румянцев А.Ю.** Оценка перемещений зданий с сейсмоизолированным скользящим поясом // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2007. №3.С.34-36.

**13.Аубакиров А.Т.** К расчету зданий на сейсмоизолирующих фундаментах с элементами сухого трения // Строительная механика и расчет сооружений. 1986.№3.С.70-74.

**14.Лапин В.А., Ержанов С.Е.** Динамика полигона сейсмоизоляции: здание с опорами на фторопластовых прокладках // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №6.С.70-76.

**15.Пановко Я.Г.** Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука.1971.239 с.

**16.Хачиян Е.Е., Левонян А.А.** Метод прогнозирования синтетических сейсмограмм и акселерограмм различных грунтовых оснований при сильных землетрясениях//Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений.2018.№2.С.14-25.

**17.Смирнов В.И., Вахрина Г.Н.** Развитие моделей расчетных акселерограмм сейсмических воздействий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. №1.С.29-39.

**18.Тяпин А.Г.** Современные нормативные подходы к расчету ответственных сооружений на сейсмические воздействия. М.: Изд-во АСВ. 2018. 518 с.

**19.Тяпин А.Г.** Линейно-спектральный расчет высотного здания на сейсмическое воздействие // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №1.С.20-27.

**20.Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФ-МЛ. 1958. 468 с.

**21.Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1965. 332 с.

**22.Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. М.: Наука. 1967.444 с.

**23.Беллман Р., Калаба Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир.1968.183с.

**24.Востров В.К.** Линейные и нелинейные колебания оснований с периодическими и почти периодическими сейсмическими воздействиями // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №2.С.33-42.

**25.Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971. 288 с.

**26.Смирнов В.И., Бубис А.А., Юн А.Е., Петряшев С.О., Петряшев Н.О.** Методика расчета здания на сейсмическое воздействие с системой сейсмоизоляции // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2012. №3.С.17-20.

## REFERENCES

1. SP 14.13330.2018 «SNIIP II-7-81\* Stroitel'stvo v sejsmicheskikh rajonah».
- 2.Тяпин А.Г., Наумкин А.В. Проектное и максимальное расчетные сейсмические воздействия. Normal'nye i anomal'nye sootnosheniya // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №2.Р.9-15.
- 3.Izmenenie №1 k SP 14.13330.2018 «SNIIP 11-7-81\* Stroitel'stvo v sejsmicheskikh rajonah». Redakciya 1.
- 4.Birbraer A.N. Raschet konstrukcij na sejsmostojkost'. S.-Pb.: Nauka. 1998. 256 p.
- 5.Тяпин А.Г. Некоторые соображения о нормах нового поколения. СHаст' I: obshchie polozheniya i zadanie sejsmicheskogo vozdejstviya // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №5. P. 7-14.
- 6.Smirnova L.N., Uzdin A.M., Prokopovich S.V. Nekotorye osobennosti modelirovaniya raschetnyh akselerogramm // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №1.Р.33-41.
- 7.Leonov M.YA. Ostryj rezonans za predelom uprugosti pri sejsmicheskikh kolebaniyah prostejshih sooruzhenij // Izvestiya AN Kirgizskoj SSR. 1974. №5.Р.61-66.
- 8.Vedyakov I.I., Vostrov V.K. Avarijnye raschetnye situacii i avarijnye sejsmicheskie nagruzki // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2016. №5.Р.33- 38.
- 9.N'yumark N., Rozenblyuet E. Osnovy sejsmostojkogo stroitel'stva. M.: Strojizdat. 1980. 344 p.
- 10.Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.E. Teoriya kolebanij. M.:Nauka.1981. 568 p.
- 11.Magnus K.K. Kolebaniya. Vvedenie v issledovanie kolebatel'nyh sistem. M.: Mir. 1982. 304 p.
- 12.Davydova G.V., Ermoshin A.A., Uzdin A.M., Rumyancev A.YU. Ocenka peremeshchenij zdaniy s sejsmoizolirovannym skol'zyashchim pojasom // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2007. №3.Р.34-36.

13. Aubakirov A.T. K raschetu zdaniy na sejsmoizoliruyushchih fundamentah s elementami suhogo treniya // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 1986. №3. P.70-74.

14. Lapin V.A., Erzhanov S.E. Dinamika poligona sejsmoizolyacii: zdanie s oporami na ftoroplastovyh prokladkah // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №6. P.70-76.

15. Panovko YA.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij. M.: Nauka. 1971. 239 p.

16. Hachiyani E.E., Levonyan A.A. Metod prognozirovaniya sinteticheskikh sejsmogramm i akselerogramm razlichnyh gruntovyh osnovanij pri sil'nyh zemletryasenyah // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2018. №2. P.14-25.

17. Smirnov V.I., Vahrina G.N. Razvitie modelej raschetnyh akselerogramm sejsmicheskikh vozdeystvij // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2013. №1. P.29-39.

18. Tyapin A.G. Sovremennye normativnye podhody k raschetu otvetstvennyh sooruzhenij na sejsmicheskie vozdeystviya. M.: Izd-vo ASV. 2018. 518 p.

19. Tyapin A.G. Linejno-spektral'nyj raschet vysotnogo zdaniya na sejsmicheskoe vozdeystvie // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №1. P.20-27.

20. Stepanov V.V. Kurs differencial'nyh uravnenij. M.: GIF-ML. 1958. 468 p.

21. Pontryagin L.S. Obyknovennye differencial'nye uravneniya. M.: Nauka. 1965. 332 p.

22. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele. M.: Nauka. 1967. 444 p.

23. Bellman R., Kalaba R. Kvazilinearizatsiya i nelinejnye kraevye zadachi. M.: Mir. 1968. 183 p.

24. Vostrov V.K. Linejnye i nelinejnye kolebaniya osnovanij s periodicheskimi i pochtii periodicheskimi sejsmicheskimi vozdeystviyami // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2019. №2. P.33-42.

25. Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasy i Z-preobrazovaniya. M.: Nauka. 1971. 288 p.

26. Smirnov V.I., Bubis A.A., Yun A.E., Petryashev S.O., Petryashev N.O. Metodika rascheta zdaniya na sejsmicheskoe vozdeystvie s sistemoy sejsmoizolyacii // Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2012. №3. P.17-20.

*Для цитирования: Ведыаков И.И., Востров В.К. Развитие моделей колебаний основания и нормативных подходов к расчетам ответственных сооружений на сейсмические воздействия // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №2. С. 32-52. DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-32-54](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-32-54)*

*For citation: Vedyakov I. I., Vostrov V. K. Development of the Base Oscillation Models and Regulatory Approaches to the Calculation of Critical Structures for Seismic Impacts. Earthquake Engineering. Constructions Safety. 2020, no. 2, pp. 32-52. [In Russian] DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-32-54](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-32-54)*



УДК666.691:669.86

**Использование алюмосодержащего нанотехногенного сырья нефтехимии для получения высокопрочного кирпича**

**Абдрахимов В.З.** доктор технических наук, профессор Самарский государственный экономический университет. Самара, Российская Федерация

**Абдрахимова Е.С.** кандидат технических наук, доцент, Самарский Национальный государственный исследовательский университет им. С.П. Королева. Самара, Российская Федерация

**Аннотация** Сокращение запасов традиционного природного сырья заставляет искать новые способы его замещения различными видами отходов. При этом исключаются затраты на геологоразведочные работы, строительство и эксплуатацию карьеров, освобождаются значительные земельные участки от воздействия негативных антропогенных факторов. Опыт передовых зарубежных стран показал техническую осуществимость этого направления и применения еще и как инструмента защиты природной среды от загрязнения. На основе межсланцевой глины и высокоглиноземистого нанотехногенного сырья нефтехимии – отработанного катализатора ИМ-2201 Новокуйбышевского нефтехимического комбината получен керамический кирпич с высокими физико-механическими показателями без применения природного традиционного сырья.

Благодаря использованию нанотехногенного сырья нефтехимии – отработанного катализатора ИМ-2201, содержащего более 70%  $Al_2O_3$  получен керамический кирпич, который соответствует марке М200. Из керамического кирпича марки М200 возможно возводить несущие стены нижних этажей зданий повышенной этажности (15 этажей и более). Разработаны инновационные предложения по использованию отходов производств: межсланцевой глины и отработанного катализатора в производстве керамического высокопрочного сейсмостойкого кирпича с повышенной прочностью и морозостойкостью. Безусловным достоинством использования многотоннажных отходов отработанного катализатора ИМ-2201 и межсланцевой глины — отхода горючих сланцев является разгрузка экологической обстановки.

**Ключевые слова:** керамический кирпич, межсланцевая глина, отработанный катализатор, нанотехногенное сырье

Abdrakhimov Vladimir Z., Professor, Samara State Economic University.  
Samara, Russian Federation

Abdrakhimova Elena S., associate Professor of Samara National research  
University, candidate of technical Sciences. Samara, Russian Federation

### **Nanotehnologija the use of Aluminium-containing Raw Materials in the Petrochemical Industry to Produce High -performance Brick**

**Abstract.** The reduction in the reserves of traditional natural raw materials makes us look for new ways to replace it with different types of waste. At the same time, the costs of exploration, construction and operation of quarries are excluded, and significant land plots are exempt from the impact of negative anthropogenic factors. The experience of advanced foreign countries has shown the technical feasibility of this direction and its application as a tool for protecting the natural environment from pollution. On the basis of inter-shale clay and high-alumina nanotehnologija raw materials petrochemical spent catalyst IM-2201 NovoKuibyshev petrochemical plant derived ceramic brick with high physical-mechanical properties without the use of traditional natural materials.

Using nanotechnogenic petrochemicals – spent catalyst IM-2201, containing more than 70%  $Al_2O_3$ , a ceramic brick was obtained that corresponds to the M200 brand. It is possible to build load-bearing walls of the lower floors of high-rise buildings (15 floors or more) from M200 ceramic bricks. Innovative proposals for the use of industrial waste: interslant clay and spent catalyst in the production of high-strength ceramic earthquake-resistant bricks with high strength and frost resistance have been developed. The absolute advantage of using multi-tonnage waste of the spent IM-2201 catalyst and inter-shale clay for the waste of oil shale is the unloading of the environmental situation.

**Keywords:** ceramic brick, inter- shale clay, spent catalyst, nanotechnologie raw materials

**DOI:** [10.37153/2618-9283-2020-2-55-66](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-55-66)

**Введение.** Сокращение запасов традиционного природного сырья заставляет искать новые способы его замещения различными видами отходов [1, 2]. Опыт передовых зарубежных стран показал техническую осуществимость этого направления и применения еще и как инструмента защиты природной среды от загрязнения [3, 4]. Вместе с тем из отходов или из отходов в комбинации с природным сырьем могут быть изготовлены практически все основные строительные материалы [1, 2]. За счет вовлечения многотоннажных отходов в производство керамических материалов массового потребления, к которым относятся стеновые материалы, можно

кардинально изменить параметры сырьевой базы России, что поспособствует также снижению экологической напряженности в регионах. При этом исключаются затраты на геологоразведочные работы, строительство и эксплуатацию карьеров, освобождаются значительные земельные участки от воздействия негативных антропогенных факторов [1-3].

Большинство легкоплавких (кирпично-черепичных) глин Российской Федерации классифицируются как полу кислые и кислые, причем неспекающиеся с высоким содержанием красящих оксидов ( $\text{Fe}_2\text{O}_3 > 3\%$ ) и низким содержанием оксида алюминия ( $\text{Al}_2\text{O}_3=12-18\%$ ) [5]. При таком содержании оксида алюминия в глинистых компонентах из них невозможно получить кирпич марок М150 и более. Для возведения несущих стен нижних этажей зданий повышенной этажности (15 этажей и более) требуется керамический кирпич марок — М150-М300.

В соответствии с п.6.14.4 СП 14.13330.2014 «Строительство в сейсмических районах» для кладки несущих и самонесущих стен или заполнения, участвующего в работе каркаса следует применять керамический кирпич и камни — марки не ниже М125 при сейсмичности площадки строительства 8 и 9 баллов [6].

Основным резервом для получения высококачественных керамических кирпичей и камней является использование в качестве отощителей высокоглиноземистого нанотехногенного сырья нефтехимии.

**Постановка задачи.** С учетом сокращения запасов традиционного природного сырья необходимо найти новые способы его замещения различными видами отходов. Опыт передовых зарубежных стран показал техническую осуществимость этого направления и применения еще и как инструмента защиты природной среды от загрязнения.

**Цель.** На основе межсланцевой глины и высокоглиноземистого нанотехногенного сырья нефтехимии - отработанного катализатора ИМ-2201 Новокуйбышевского нефтехимического комбината получить керамический кирпич с высокими физико-механическими показателями без применения природного традиционного сырья.

## **Экспериментальная часть**

### ***Сырьевые материалы***

Для производства керамического кирпича в качестве глинистого материала использовался отход горючих сланцев — межсланцевая глина, а в качестве алюмосодержащего отощителя — высокоглиноземистое нанотехногенное сырье нефтехимии – отработанный катализатор ИМ-2201 Новокуйбышевского нефтехимического комбината. Химические составы, оксидные и поэлементные, представлены в табл. 1 и 2.

**Таблица 1 - Оксидный химический состав отходов производств**  
**Table 1 - The oxide chemical composition of industrial wastes**

Отход	Содержание оксидов, мас. %							
	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	R <sub>2</sub> O	Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	П.п.п.
Межсланцевая глина	45,47	13,15	5,8	11,2	2,3	3,4	—	18,68
Отработанный катализатор ИМ-2201	8,40	74,5	0,75	—	0,50	0,47	14,5	—

**Таблица 2 - Элементный химический состав отходов производств**  
**Table 2 - Elemental chemical composition of industrial wastes**

Отход	Содержание элементов, мас. %									
	C	O	Na	Mg	Al+Ti	Si	S	K	Ca	Fe
Межсланцевая глина	5,73	51,06	0,46	1,04	9,20	18,66	1,83	1,75	8,53	3,35
Катализатор ИМ-2201	—	60,74	—	—	26,58	2,82	—	2,81	Cr=8,1	

*Межсланцевая глина*, образуется при добыче горючих сланцев на сланцеперерабатывающих заводах (на шахтах) она является отходом горючих сланцев. По числу пластичности межсланцевая глина относится к высокопластичному глинистому сырью (число пластичности 27-32) с истинной плотностью 2,55-2,62 г/см<sup>3</sup>. Химический оксидный состав межсланцевой глины представлен в табл. 1, поэлементный в табл. 2.

Минералогический состав межсланцевых глин разнообразен, однако общим для них является наличие кремнезема, гидрослюды, монтмориллонита и кальцита. Глинистые минералы в межсланцевой глине в основном представлены монтмориллонитом с примесью гидрослюды.

*Нанотехногенное сырье нефтехимии*. В качестве алюмосодержащего компонента использовалось высокоглиноземистое нанотехногенное сырье нефтехимии – это отработанный катализатор ИМ-2201 Новокуйбышевского нефтехимического комбината [7, 8].

Исследования по определению наноразмерности отработанного катализатора были проведены в научно-исследовательском институте ядерных исследований (г. Гатчина, Ленинградская область) [13, 15]. Исследования отходов нефтехимии с целью определения размерности его частиц проведены методом малоуглового рассеяния нейтронов на дифрактометре «Мембрана-2» Исследования показали, что данные отходы нефтехимии, отличаются от высокодисперсных порошкообразных материалов природного и техногенного происхождения наноразмерностью, которая находится в пределах от 40 до 200 нм и зависит от условий образования.

Использование в керамических материалах нанотехногенного сырья позволит значительно повысить физико-механические показатели изделий [8, 10]. Свойства наночастиц могут существенно отличаться от свойств массивного материала. Так наночастицы могут иметь иные теплоемкость, электропроводность, фазовое состояние, чем соответствующие макрокристаллы.

Наночастицы — один из наиболее общих терминов для обозначения изолированных ультрадисперсных объектов, во многом дублирующий ранее известные термины (коллоидные частицы, ультрадисперсные частицы), но отличающийся от них четко определенными размерными границами. Твердые частицы размером менее 1 нм обычно относят к кластерам, более 100 нм — к субмикронным частицам.

Размерные границы ультрадисперсности строго не определены, и в разных областях знания в это понятие вкладывается несколько различное количественное содержание. Два наиболее распространенных подхода к размерности приведены выше в определении ультрадисперсной системы. Согласно второму из них, к субмикронным материалам относятся сплавы и порошки с размером зерна (кристаллитов) от 500 нм до 1,2 мкм, к наноструктурированным — с размером зерна менее 200 нм, а ультрадисперсные материалы занимают промежуточное положение между ними. **Кристаллит** — твердое тело субмикронных размеров, представляющее собой трехмерную периодическую решетку из атомов, ионов или молекул, ограниченное замкнутой поверхностью, за пределами которой изменена или нарушена ориентация кристаллической решетки, либо находится газообразная, жидкая фаза или вакуум. **В данном случае поверхность** — это граница раздела двух фаз (твердого тела, жидкости, газа).

Уменьшение частиц до нанометровых размеров приводит к проявлению в них так называемых «квантовых размерных эффектов», когда размеры исследуемых объектов сравнимы с длиной де-бройлевской волны электронов, фононов и экситонов. В сфероидальных наночастицах имеет место трёхмерное квантование уровней, что позволяет говорить, в зависимости от состава наночастиц, об образовании «квантовых точек», «квантовых кристаллитов» и других объектов с нулевой размерностью.

Присутствие в системе наноразмерных частиц способствует увеличению объема адсорбционно и хемосорбционно связываемой ими воды и уменьшению объема капиллярно-связанной и свободной воды, что приводит к повышению пластичности керамической массы и прочностных показателей [8, 10, 11].

## Результаты исследования

Межсланцевую глину измельчали до прохождения сквозь сито №1.0, затем компоненты в соотношениях, представленных в табл. 3, тщательно перемешивали.

**Таблица 3 - Составы керамических масс**  
**Table 3 - The compositions of the ceramic masses**

Отходы	Массовое содержание компонентов, %, в составах		
	1	2	3
Межсланцевая глина	70	60	50
Отработанный катализатор ИМ-2201	30	40	50

На рисунке представлена предлагаемая технология для производства керамического кирпича



**Рисунок – Технологическая схема производства керамического кирпича**  
**Figure -Technological scheme of production of ceramic bricks**

Керамическую массу готовили пластическим способом при влажности 18 – 22 %, из которой формовали кирпичи размером 250×120×65 мм. Высушенные кирпичи до остаточной влажности не более 5 % обжигали при температуре обжига 1050°C (конечная температура обжига кирпичей всех составов).

Спекание многих видов керамики, в том числе керамического кирпича (стенной материал) идет с участием жидкой фазы, от свойств которой во многом зависит процесс формирования структуры материала и его свойств. Повышение реакционной способности жидкой фазы по отношению к тугоплавким кристаллическим составляющим дает возможность интенсифицировать процесс спекания, что позволяет уменьшить расход топлива. Снижение температуры образования и увеличение агрессивности жидкой фазы достигается путем ввода в состав керамической массы плавнеобразующих оксидов, при этом следует учитывать доступность материала для массового производства, технологичность массы нового состава, качество получаемых изделий. Процессы фазообразования и спекания во многом определяются не только количеством жидкой фазы, но и ее составом, а, следовательно, и строением.

В табл. 4 приведены физико-механические показатели образцов керамического кирпича при конечной оптимальной температуре обжига 1050°C.

**Таблица 4 - Физико-механические показатели кирпича**  
**Table 4 - Physical and mechanical properties of brick**

Показатель	Составы		
	1	2	3
Предел прочности, МПа:			
при сжатии	18,8	20,7	21,1
при изгибе	3,2	3,5	3,8
Морозостойкость, циклы	42	53	68
Общая усадка, %	7,2	6,5	5,8
Термостойкость, теплосмены	3	5	8

Как видно из табл. 4, керамические кирпичи из предложенных составов имеют высокие показатели по прочности, морозостойкости и термостойкости.

*Механическая прочность* — свойство материала сопротивляться разрушению под влиянием внешних нагрузок. Зависит она от количества пор, их размера и формы, от текстуры материала и фазового состава черепка. Характеризуется пределом прочности, т. е. напряжением в материале, соответствующем нагрузке, вызывающей разрушение образца.

*Термостойкость* – термическая стойкость, способность керамических материалов противостоять, не разрушаясь, термическому напряжению, обусловленному изменением температуры при нагреве или охлаждении.

Большинство методов определения тепловых напряжений просты в использовании, но они редко согласуются с промышленными условиями [11]. Основываясь на линейной упругой механике, У. Д. Кинджери считал, что напряжение возникает при мгновенном изменении температуры  $\Delta T$  на поверхности образца [11].

Термостойкость зависит от ТКЛР (температурный коэффициент линейного расширения) и теплопроводности материала, его упругих и других свойств, а также от формы и размеров изделия. Термостойкость обратно пропорциональна значению коэффициента теплового расширения, который зависит от химического состава керамики.

Как видно из табл. 4, с повышением содержания алюмосодержащего нанотехногенного сырья термостойкость кирпича повышается. Очевидно, это связано с повышением содержания в керамике оксида алюминия (чем выше содержание в отходах оксида алюминия, тем выше термостойкость) [11].

На практике термостойкость оценивают обычно числом теплосмен (циклов нагрева до 350°C и охлаждения в проточной воде при 18 – 20°C), выдерживаемых образцом (изделием) до появления трещин, частичного или полного разрушения, либо температурным градиентом, при котором возникают трещины.

*Морозостойкость керамических материалов* определяют по способности насыщенного водой материала выдерживать многократное попеременное замораживание и оттаивание без видимых признаков разрушения и без значительного снижения прочности. Морозостойкость измеряется количеством циклов замораживания и оттаивания, проводимых в лабораторных условиях. Причиной разрушения материала в этих условиях является вода, находящаяся в порах материала и при замерзании увеличивающаяся в объеме. На практике поры и капилляры материалов заполняются водой не полностью. Часть их служит резервными объемами, в которые отжимается вода в процессе замораживания. Поэтому полное разрушение материала наступает лишь после нескольких циклов замораживания и оттаивания при полном его водонасыщении. Морозостойкость строительных материалов определяется величиной и характером пористости и условиями их эксплуатации. Она тем выше, чем меньше водопоглощение и больше прочность материала при растяжении. Плотные материалы морозостойки. Из пористых материалов морозостойкостью обладают только те материалы, у которых в основном имеются закрытые поры или вода.

Если в используемых отходах содержатся наночастицы даже в небольшом количестве, то энергию Гиббса можно записать в следующем виде:

$$G_i^{\text{HK}} = G_i^{\text{MAC}} + \sigma f_i,$$



где  $G_i^{\text{нк}}$  и  $G_i^{\text{мас}}$  – энергия Гиббса нанокристаллических и массивных фаз соответственно;

$\sigma_i$  и  $f_i$  – поверхностное натяжение и поверхность частиц  $i$ -й фазы соответственно.

Отсюда видно, что в системе появляется еще один независимый параметр – поверхность, а, следовательно, дополнительная степень свободы [8].

Эффект от внедрения наноразмерных частиц принципиально выражается в том, что в системе появляется не только дополнительная граница раздела, но и носитель квантовомеханических проявлений, что способствует повышению физико-механических показателей.

При уменьшении размера зерен увеличивается общая величина поверхности раздела фаз, уменьшается средний радиус кривизны выпуклых участков, растет их избыточная поверхностная энергия, уменьшаются расстояния между источниками и поглотителями вакансий в системе. Экспериментальные исследования и богатый практический опыт керамических производств подтверждают важнейшую роль степени измельчения [12] (или использования наноразмерных сырьевых материалов). За счет действия одного этого фактора удается в ряде случаев снизить требуемую температуру спекания на 200°C и более.

Эффект от внедрения наноразмерных частиц принципиально выражается в том, что в системе появляется не только дополнительная граница раздела, но и носитель квантовомеханических проявлений [7, 9].

Поверхность изделий всех трех составов в достаточной мере плотная, открытых пор и других дефектов не наблюдается. Встречаются единичные включения железистых минералов до 0,1 мм, которые не снижают общее восприятие цвета изделия.

## **Выводы**

Таким образом, разработаны составы керамических масс для производства керамического кирпича на основе межсланцевой глины и нанотехногенного сырья – отработанного катализатора ИМ-2201 Новокуйбышевского нефтехимического комбината без применения традиционного природного сырья.

Разработаны керамические изделия, отличающиеся от других керамических материалов более высокой механической прочностью, морозостойкостью и термостойкостью.

Использование отходов производств при получении керамических материалов способствует утилизации промышленных отходов, охране окружающей среды, расширению сырьевой базы для производства керамических материалов.

## Литература

1. Абдрахимов В.З. Рециклинг отходов топливно-энергетического комплекса в производстве легковесного кирпича на основе глинистых материалов различного минерального состава // Экология промышленного производства. 2020. №1. С. 10-16.
2. Абдрахимов В.З., Кайракбаев А.К., Абдрахимова Е.С. Использование в производстве клинкерного кирпича отходов цветной металлургии и энергетики Восточного Казахстана // Экология и промышленность России. 2020. Т. 24. №3, С. 14-18.
3. Абдрахимов В.З. Рециклинг отходов энергетики и цветной металлургии в производстве керамического кирпича способствует энергетической безопасности биосферы // Биологическая совместимость: человек, регион, технологии. 2019. №3. С.71-80.
4. Абдрахимов В.З. Технические свойства и структура пористости клинкерных материалов на основе отходов цветной металлургии Восточного Казахстана // Химическая технология. 2019. №11. С. 499-506.
5. Абдрахимов В.З. Использование обожженного солевого шлака для получения высокопрочного сейсмологического кирпича // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. №5. С. 45-50.
6. Абдрахимов В.З. Влияние нанотехногенного сырья на сушильные свойства и физико-механические показатели керамического кирпича // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №1. С. 29-34.
7. Хлыстов А.И., Безгина Л.Н., Власов А.В., Линев А.И. Получение комплексного жаростойкого вяжущего на основе алюмосиликатных и высокоглиноземистых отходов промышленности // Огнеупоры и техническая керамика. 2012. №7. С. 52-56.
8. Абдрахимова Е.С., Абдрахимов В.З. К вопросу использования алюмосодержащего нанотехногенного сырья в производстве керамических композиционных материалов // Материаловедение. 2014. №12. С. 44-52.
9. Абдрахимов В.З., Абдрахимова Е.С. Использование отходов нефтедобычи в производстве жаростойких поризованных бетонов на основе фосфатных связующих Перспективные материалы 2017. №4. С. 55-64.
10. Абдрахимов В.З., Колпаков И. Инновационные направления использования кальцийсодержащего нанотехногенного сырья: осадок-отхода сточных вод, отхода пыли-уноса асфальтобетонных заводов, шлама от водоочистки воды и гальванического шлама в производстве кирпича // Известия вузов. Строительство. 2013. №8. С. 41-46.
11. Elstner L., Jeschke P., Kronert W., Protogerakis E. Thermoschockverhalten Feuerfester Baustoffe aus Zirkoniumdioxid. Teil III // Experimentelle Untersuchungen, Sprechsaal. 1982, no. 115, pp. 542 – 556.
12. Будников П. П., Балкевич В. Л., Бережной А. С. и др. Химическая технология керамики и огнеупоров. М.: Стройиздат. 1972. 553 с.

## References

1. Abdrakhimov V. Z. Utilization of fuel and energy complex waste in the production of light bricks based on clay materials of various mineral composition. Ecology of industrial production. 2020, no. 1, pp. 10-16. [In Russian].
2. Abdrakhimov V. Z., Kairakbaev A. K., Abdrakhimova E. S. Use of non-ferrous metallurgy and energy waste in the production of clinker bricks in East Kazakhstan. Ecology and industry of Russia. 2020, v. 24, no. 3, pp. 14-18. [In Russian].
3. Abdrakhimov V. Z. Utilization of energy and non-ferrous metallurgy waste in the production of ceramic bricks contributes to the energy security of the biosphere. Biocompatibility: people, region, technology. 2019, no. 3, pp. 71-80. [In Russian].
4. Abdrakhimov V. Z. Technical properties and porosity structure of clinker materials based on non-ferrous metallurgy wastes of East Kazakhstan. Chemical technology. 2019, no. 11, pp. 499-506. [In Russian].
5. Abdrakhimov V. Z. The use of burnt salt slag to produce high-strength seismological bricks. Earthquake engineering. Constructions safety. 2019, no. 5, pp. 45-50. [In Russian].
6. Abdrakhimov V. Z. Influence of nanotechnogenic raw materials on drying properties and physical and mechanical parameters of ceramic bricks. Earthquake engineering. Constructions safety. 2020, no. 1, pp. 29-34. [In Russian].
7. Khlystov A. I., Bezgina L. N., Vlasov V. A., Linev, A. I. An integrated heat-resistant binder based on an aluminosilicate and high-alumina industrial wastes. Refractories and technical ceramics. 2012, no.7, pp. 52-56. [In Russian].
8. Abdrakhimova E. S., Abdrakhimov V. Z. To the question of nanotehnologija use of aluminium-containing raw material in the production of ceramic composite materials. Materials Science. 2014. №12. P. 44-52. [In Russian].
9. Abdrakhimov V. Z., Abdrakhimova E. S. The Use of waste oil in the production of porous heat-resistant concretes based on phosphate binders Promising materials 2017. №4. P. 55-64. [In Russian].
10. Abdrakhimov V. Z. Caps Innovative directions of use calcium nanotehnologija raw materials: sludge-waste wastewater, flue dust, fly ash and asphalt plants, sludge from woodside water and galvanic sludge in brick production. Izvestiya vuzov. Construction. 2013, no.8, pp. 41-46. [In Russian].
11. Elstner L., Jeschke P., Kronert W., Protogerakis E. Thermoschockverhalten Feuerfester Baustoffe aus Zirkoniumdioxid. Teil III. Experimentelle Untersuchungen, Sprechsaal. 1982, no. 115, pp. 542 – 556. [In German].
12. Budnikov P. P., Malkevich V. L., Berezhnoy A. S., etc. Chemical technology of ceramics and refractories. M.: Stroyizdat, 1972. 553 p. [In Russian].

*Для цитирования:* Абдрахимов В.З., Абдрахимова Е.С. Использование алюмосодержащего нанотехногенного сырья нефтехимии для получения высокопрочного кирпича // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №2. С. 53-64. DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-55-66](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-55-66)

*For citation:* Abdrakhimov V. Z., Abdrakhimova E.S. The Use of Nanotechnology Aluminium-containing Raw Materials in the Petrochemical Industry to Produce High-performance Brick. *Earthquake Engineering. Constructions Safety*. 2020, no. 2, pp. 53-64. [In Russian] DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-55-66](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-55-66)

**УДК 539.3****Исследование устойчивости и сейсмостойкости неоднородных двухслойных стержней в упругой среде**

Гасанова Т. Д.

кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений», Азербайджанский архитектурно-строительный университет Баку, Республика Азербайджан

Тагиева С. А.

кандидат технических наук, кафедра «Эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений», Азербайджанский архитектурно-строительный университет Баку, Республика Азербайджан

**Аннотация:** При моделировании задачи считается, что после удаления основных сейсмических воздействий от конструкции, двухслойный стержень, который находится в упругой среде, подвергается действию периодических продольных сил. В исследуемой работе применен метод Бубнова-Галеркина, произведены численные расчеты. Построена и показана на рисунке главная область динамической неустойчивости, где пунктирной линией отмечено решение однородной задачи.

**Ключевые слова:** сейсмическое воздействие, динамическая устойчивость, неоднородные материалы, двухслойный стержень, продольная сила

Hasanova Tukezban Jafar

PhD, Ass.Prof., Department of «Exploitation and Reconstruction of Buildings and Constructions», Azerbaijan University of Architecture and Construction Baku, Republic of Azerbaijan

Tagiyeva Saida Abdulali

Candidate of Technical Sciences, Department of «Exploitation and Reconstruction of Buildings and Constructions», Azerbaijan University of Architecture and Construction

Baku, Republic of Azerbaijan

**Research of Stability and Seismic Resistance of Non-Uniform Two-Layer Rods in Elastic Medium**

**Abstract:** Simulation considered after the main seismic impacts are removed from the structure, the two-layer rod, which is in an elastic environment, is subjected to periodic longitudinal forces. In the investigated work the Bubnov's-Galerkin method was used, numerical calculations were made. The main area of dynamic instability is built and shown in the figure, where the dotted line marks the solution of a homogeneous problem.

**Keywords:** seismic impact, dynamic stability, non-uniform materials, two-layer rod, longitudinal force

**DOI:** [10.37153/2618-9283-2020-2-67-75](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-67-75)

## Введение

В данной работе рассчитывается устойчивость и сейсмостойкость неоднородных двухслойных стержней в упругой среде под действием периодических продольных сил. В виде упругого основания принята модель Винклера, предполагая гипотезу плоских сечений справедливой для всей толщины элемента стержня. В общем виде получено уравнение и определена область динамической устойчивости. Рассматривается шарнирное закрепление концов стержня, и рассчитывается прогиб. Определение границ областей неустойчивости сводится к отысканию условий, при которых заданное дифференциальное уравнение имеет периодические решения с периодами  $T$  и  $2T$ . Получено уравнение критических частот, связывающее частоты внешней нагрузки с собственной частотой стержня и величиной продольной силы.

## Постановка задачи

Рассмотрим задачу о динамической устойчивости двухслойного прямолинейного стержня на упругом основании под действием периодических продольных сил. Координатная система выбрана следующим образом: оси  $OY$  и  $OZ$  находятся в поперечном сечении стержня: ось  $OX$  направлена по оси стержня.

Предполагается: что слои стержня изготовлены из различных неоднородных материалов и модули упругости зависят от координат длины и толщины и изменяются по следующему закону:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10} f_1(x) f_{11}(z) \\ E_2 &= E_{20} f_1(x) f_{22}(z) \end{aligned} \quad (1)$$

В возмущенном состоянии стержня связь между приращениями напряжений и деформаций будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^1 &= E_{10}f_1(x)f_{11}(z)\Delta\varepsilon & -h_1 \leq z \leq 0 \\ \Delta\sigma^2 &= E_{20}f_1(x)f_{22}(z)\Delta\varepsilon & 0 \leq z \leq h_2\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $h_1, h_2$  - толщины соответствующих слоев. Предположим, что гипотеза плоских сечений справедлива для всей толщины стержня т.е.

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + z \vartheta \varepsilon \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0$  - дополнительная деформация оси стержня,  $\vartheta \varepsilon$  - кривизна центральной линии.

Приращение усилия и момента определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta P &= b \left( \int_{-h_1}^0 \Delta\sigma^1 dz + \int_0^{h_2} \Delta\sigma^2 dz \right) \\ \Delta M &= b \left( \int_{-h_1}^0 \Delta\sigma^1 z dz + \int_0^{h_2} \Delta\sigma^2 z dz \right)\end{aligned}\quad (4)$$

здесь  $b$  - ширина поперечного сечения

С учетом (2), (3) нетрудно получить:

$$\begin{aligned}\Delta P &= E_{10}f_1(x)(\ell_0 a_1^0 + \vartheta \varepsilon a_1^1) + E_{20}f_1(x)(\ell_0 a_2^0 + \vartheta \varepsilon a_2^1) \\ \Delta M &= E_{10}f_1(x)(\ell_0 a_1^1 + \vartheta \varepsilon a_1^2) + E_{20}f_1(x)(\ell_0 a_2^1 + \vartheta \varepsilon a_2^2)\end{aligned}\quad (5)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$a_1^n = \int_{-h_1}^0 f_{11}(z) z^n dz; \quad a_2^n = \int_0^{h_2} f_{22}(z) z^n dz, \quad (n = 0, 1, 2) \quad (6)$$

Уравнение движения рассматриваемого стержня имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta P &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta M) + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_0 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

где  $m$  - масса единицы длины стержня,  $w$  - прогиб оси стержня,  $K_0$  - коэффициент постели упругого основания. С учетом (5) из первого уравнения системы (7) получим:

$$\ell_0 = -\frac{\alpha_1^1 + \ell_{20}\alpha_2^1}{\alpha_1^0 + \ell_{20}\alpha_2^0} \varepsilon \varepsilon, \quad (\ell_{20} = E_{20}/E_{10}) \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5) для приращения момента находим:

$$\Delta M = KI \cdot f_1(x) \cdot \varepsilon \varepsilon \quad (9)$$

где обозначено:

$$KI = E_{10} \left\{ \alpha_1^2 + \ell_{20}\alpha_2^2 - \frac{(\alpha_1^1 + \ell_{20}\alpha_2^1)^2}{\alpha_1^0 + \ell_{20}\alpha_2^0} \right\} \quad (10)$$

С учетом (9) из второго уравнения системы (7) получим:

$$KI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_1(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_0 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Рассмотрим случай, когда функции  $P(t)$  и  $f_2(x)$  – изменяются по следующим законам:

$$P(t) = P_0 \cos vt; \quad f_1(x) = 1 + \mu \frac{x}{\ell} \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (11) представляется в следующем виде:

$$KI \left( 1 + \mu \frac{x}{\ell} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2KI \frac{\mu}{\ell} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + P_0 \cos vt \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_0 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Рассмотрим шарнирное закрепление концов стержня. Тогда для прогиба можем принять выражение:

$$w(x, t) = \varphi(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega^2 [1 - 2\eta \cos vt] \varphi(t) = 0 \quad (15)$$

где обозначено:



$$\omega^2 = \left[ KI \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^4 + k_0 \right] \frac{1}{m}$$

$$\eta = \frac{P_t}{2P_{kr}^*} \quad (16)$$

$$P_{kr}^* = \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 KI \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right) + k_0 \left( \frac{\ell}{\pi} \right)^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m} \left[ KI \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{n^4 \pi^4}{\ell^4} + \beta \right]$$

$$P_n^* = \frac{n^2 \pi^2 KI \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right)}{\ell^2} + \frac{\beta \ell^2}{n^2 \pi^2}$$

Опуская индексы, представим уравнение (15) в виде:

$$\varphi'' + \omega^2 (1 - 2\eta_1 \cos v \tau) \varphi = 0, \quad \left( \eta_1 = \frac{P_t}{2P_{kr}^*} \right) \quad (17)$$

которое называется уравнением Матье.

Поступая как в работе [1,6] приводим способ определения границ областей неустойчивости решений уравнения (15). Определение границ областей неустойчивости сводится к отысканию условий, при которых заданное дифференциальное уравнение имеет периодические решения с периодами  $T$  и  $2T$ .

Ищем периодическое решение уравнения (15) с периодом  $2T$  в виде:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left( a_n \sin \frac{nvt}{2} + b_n \cos \frac{nvt}{2} \right)$$

Подставляя (17) в (15) и приравнявая коэффициенты при одинаковых  $\sin \frac{nvt}{2}$  и  $\cos \frac{nvt}{2}$  получим следующие системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $a_n$  и  $b_n$ :

$$\begin{aligned} \left( 1 + \eta_1 - \frac{v^2}{4\omega^2} \right) a_1 - \eta_1 a_3 &= 0 \\ \left( 1 - \frac{n^2 v^2}{4\omega^2} \right) a_n - \eta_1 (a_{n-2} + a_{n+2}) &= 0, \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \\ \left( 1 - \eta_1 - \frac{v^2}{4\omega^2} \right) b_1 - \eta_1 b_3 &= 0 \\ \left( 1 - \frac{n^2 v^2}{4\omega^2} \right) b_n - \eta_1 (b_{n-2} + b_{n+2}) &= 0, \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \quad (18)$$

Условием существования периодических решений уравнения (15) является равенство нулю определителей полученных однородных систем (18). Объединяя эти условия под знаком  $\pm$  получим следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \eta_1 - \frac{v^2}{4\omega^2} & -\eta_1 & 0 & \dots \\ -\eta_1 & 1 - \frac{9v^2}{4\omega^2} & -\eta_1 & \dots \\ 0 & -\eta_1 & 1 - \frac{25v^2}{4\omega^2} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Полученное уравнение, связывающее частоты внешней нагрузки с собственной частотой стержня и величиной продольной силы, называется уравнением критических частот.

Аналогично рассмотренному случаю ищем периодические решение уравнения (15) с периодом  $T$  в виде следующего ряда

$$\varphi(t) = b_0 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \left( a_n \sin \frac{nvt}{2} + b_n \cos \frac{nvt}{2} \right) \quad (20)$$

Подставляя ряд (20) в (15) и поступая аналогичным образом, получим следующие системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ :

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{v^2}{\omega^2} \right) a_2 - \eta_1 a_4 &= 0 \\ \left( 1 - \frac{n^2 v^2}{4\omega^2} \right) a_n - \eta_1 (a_{n-2} + a_{n+2}) &= 0, \quad (n = 4, 6, \dots) \\ b_0 - \eta_1 b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left( 1 - \frac{n^2 v^2}{4\omega^2} \right) b_n - \eta_1 (b_{n-2} + b_{n+2}) = 0, \quad (n = 4, 6, \dots)$$

Приравнивая нулю определители полученных однородных уравнений, получим следующие уравнения для определения критических частот:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{v^2}{\omega^2} & -\eta_1 & 0 & \dots \\ -\eta_1 & 1 - \frac{4v^2}{\omega^2} & -\eta_1 & \dots \\ 0 & -\eta_1 & 1 - \frac{16v^2}{\omega^2} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

и уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & -\eta_1 & 0 & 0 & \dots \\ -2\eta_1 & 1 - \frac{v^2}{\omega^2} & -\eta_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\eta_1 & 1 - \frac{4v^2}{\omega^2} & -\eta_1 & \dots \\ 0 & 0 & -\eta_1 & 1 - \frac{16v^2}{\omega^2} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

В соответствии с числом  $\eta$  входящий в (17) и (20) различаются первая, вторая, третья и т.д. области динамической неустойчивости. При этом первая область называется главной областью динамической неустойчивости.

При конкретных значениях параметров произведены численные расчеты и на рис.1. построена главная область динамической неустойчивости. Здесь пунктирной линией отмечено решение однородной задачи.

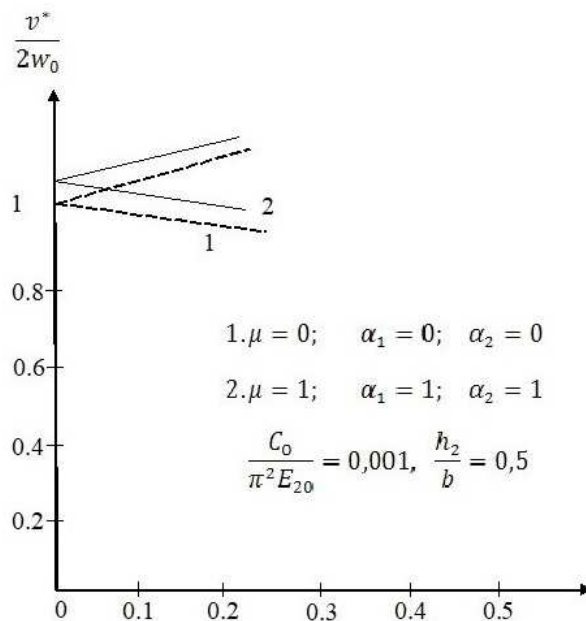


Рисунок 1  
Figure 1

## Заключение

Таким образом, в статье рассмотрен и рассчитан двухслойный стержень, который находится в упругой среде и подвергается действию периодических продольных сил после удаления основных сейсмических воздействий от конструкции. Применен метод Бубнова-Галеркина и произведены численные расчеты, построена и указана главная область динамической неустойчивости.

## Литература

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГМТТЛ. 1956. 600 с.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ. 1978. 367 с.
3. İsayev F.Q., Məmmədov Ş.A., Tağıyeva S.A. Qeyribircins çubuqların dinamiki dayanıqlığı haqqında. Tətbiqi Mexanika. Bakı. 2004. № 2. P. 64-68.
4. Ma G.W., Liu Y.M., Zhao. Li Q.M. Dynamic asymmetrical instability of elastic-plastic beams. International Journal of Mechanical Sciences. 2005, vol. 47, pp. 43-62.
5. Wee Y.C. Ceu Cin Boa. Analytical and numerical studies on the buckling of delaminated Composite beams. Journal Composite Structures. 2007, vol. 80 № 2, pp. 307-315.

## References

1. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustojchivost' uprugih sistem. M.: GMTTL. 1956. 600 s. [In Russian].
2. Lomakin V.A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU. 1978. 367 s. [In Russian].
3. İsayev F.Q., Məmmədov Ş.A., Tağıyeva S.A. Qeyribircins çubuqların dinamiki dayanıqlığı haqqında. Tətbiqi Mexanika. Bakı. 2004, no. 2, s. 64-68. [In Azerbaijani].
4. Ma G.W., Liu Y.M., Zhao. Li Q.M. Dynamic asymmetrical instability of elastic-plastic beams. International Journal of Mechanical Sciences. 2005, vol. 47, pp. 43-62. [In English].
5. Wee Y.C. Ceu Cin Boa. Analytical and numerical studies on the buckling of delaminated Composite beams. Journal Composite Structures. 2007, vol. 80, no. 2, pp. 307-315. [In English].

*Для цитирования:* Гасанова Т.Д., Тагиева С.А. Исследование устойчивости и сейсмостойкости неоднородных двухслойных стержней в упругой среде // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2020. №2. С. 65-72. DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-67-75](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-67-75)

***For citation:*** Hasanova T. J., Tagiyeva S. A. *Research of Stability and Seismic Resistance of Non-Uniform Two-Layer Rods in Elastic Medium. Earthquake Engineering. Constructions Safety.* 2020, no. 2, pp. 65-72. [In Russian] DOI: [10.37153/2618-9283-2020-2-67-75](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2020-2-67-75)

### Данные об авторах/About Authors

**Абдрахимов Владимир Закирович**, доктор технических наук, профессор Самарского государственного экономического университета. Самара, Российская Федерация  
**Abdrakhimov Vladimir Z.**, Professor, Samara State Economic University. Samara, Russian Federation e-mail: [3375892@mail.ru](mailto:3375892@mail.ru)

**Абдрахимова Елена Сергеевна**, кандидат технических наук, доцент Самарского Национального государственного исследовательского университета им. С.П. Королева. Самара, Российская Федерация  
**Abdrakhimova Elena S.**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Samara National research University. Samara, Russian Federation  
 e-mail: [3375892@mail.ru](mailto:3375892@mail.ru)

**Востров Владимир Кузьмич**, доктор технических наук, ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство». Москва, Российская Федерация  
**Vostrov Vladimir K.**, Doctor of Engineering, TSNIISK named after V.A. Koucherenko JSC Research Center of Construction. Moscow, Russian Federation  
 e-mail: [vostrv@mail.ru](mailto:vostrv@mail.ru)

**Ведяков Иван Иванович**, доктор технических наук, профессор, ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство». Москва, Российская Федерация  
**Vedyakov Ivan I.**, Doctor of Engineering, Professor, TSNIISK named after V.A. Koucherenko JSC Research Center of Construction. Moscow, Russian Federation  
 e-mail: [vedykov@mail.ru](mailto:vedykov@mail.ru)

**Гасанова Тукезбан Джафар**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений», Азербайджанский архитектурно-строительный университет. Баку, Республика Азербайджан  
**Hasanova Tukezban Jafar**, PhD, Ass. Prof., Department of «Exploitation and Reconstruction of Buildings and Constructions», Azerbaijan University of Architecture and Construction. Baku, Republic of Azerbaijan  
 e-mail: [atika2014@rambler.ru](mailto:atika2014@rambler.ru)

**Исраилов Мухади Шахидович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Комплексного научно-исследовательского института (КНИИ) РАН. Грозный, Российская Федерация  
**Israilov Muhhadi Sh.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Scientific Officer of Complex Research Institute (CRI) of the Russian Academy of Sciences. Grozny, Russian Federation  
 e-mail: [israiler@hotmail.com](mailto:israiler@hotmail.com)

**Смирнова Любовь Николаевна**, кандидат технических наук, Ученый секретарь, доцент кафедры «Строительные сооружения, конструкции и материалы» АО «НИЦ «Строительство». Москва, Российская Федерация  
**Smirnova Lyubov' N.**, PhD, Scientific Secretary, Associate Professor of the Department "Construction structures, facilities and materials" of JSC Research Center of Construction. Moscow, Russian Federation  
 e-mail: [lyubovsmirnova80@gmail.com](mailto:lyubovsmirnova80@gmail.com)

**Тагиева Саида Абдулали**, кандидат технических наук, кафедра «Эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений», Азербайджанский архитектурно-строительный университет. Баку, Республика Азербайджан

**Tagiyeva Saida Abdulali**, Candidate of Technical Sciences, Department of «Exploitation and Reconstruction of Buildings and Constructions», Azerbaijan University of Architecture and Construction. Baku, Republic of Azerbaijan

e-mail: [atika2014@rambler.ru](mailto:atika2014@rambler.ru)

**Тяпин Александр Георгиевич**, доктор технических наук, АО «Атомэнергопроект». Москва, Российская Федерация

**Tyapin Alexander G.**, Doctor of Engineering, Professor, JSC “Atomenergoproject”. Moscow, Russian Federation

e-mail: [atyapin@bvcp.ru](mailto:atyapin@bvcp.ru)