



**О.С. Царёва**  
ассистент

---

**ФГАОУ ВО Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
г. Санкт-Петербург, Россия**

---

УДК 528.06

## Оценка точности определения координат деформационных марок и расстояний между ними

**Аннотация:** В статье представлена оценка точности определения координат деформационных марок, полученных с использованием полярной пространственной засечки. При реализации такой засечки с использованием электронных тахеометров, получаемые координаты деформационных марок являются взаимозависимыми. Наиболее полной формой, характеризующей точность и взаимозависимость

случайных величин, служит корреляционная (ковариационная) матрица. Выполнен расчет коэффициентов матрицы, входящей в формулу для расчета ковариационной матрицы. Поскольку оценка деформаций предполагается с использованием инвариантных параметров – расстояний между деформационными марками, выполнена оценка точности определения расстояния между деформационными марками.

---

**Ключевые слова:** оценка точности, деформационная марка, здания памятников культурного наследия, оценка деформаций, расстояния между деформационными марками.

**Tsareva O.**

**Assistant, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia**

## Evaluation of the Accuracy of Determining the Coordinates of Deformation Marks and the Distances Between Them

**Abstract:** The article is presented an estimate of the accuracy of determining the coordinates using the polar spatial intersection. When implementing such resection using electronic tachometers, the coordinates of the deformation marks are interdependent. The most complete form that characterizes the accuracy and interdependence of random variables is the correlation

(covariance) matrix. The coefficients of the matrix, included in the formula for calculating the covariance matrix were calculated. Since the evaluation of deformations is assumed using invariant parameters - the distances between the deformation marks, the accuracy of determining the distance between the deformation marks was evaluated.

---

**Keywords:** assessment of accuracy, deformation mark, buildings of objects of cultural heritage, evaluation of deformations, distances between deformation marks.

---

**Введение**

Как известно, весьма эффективной технологией оценки устойчивости объектов являются периодические геодезические наблюдения, в результате которых определяют пространственные координаты (или только высоты) деформационных марок. Заключение делают на основании анализа изменений координат во времени. Для правильной оценки очень важно, чтобы вычисления выполнялись в единой для всего сооружения системе координат, что, по различным причинам, не всегда легко обеспечить. Действительно, определение положения всех деформационных марок, расположенных на здании, с одной станции в подавляющем числе случаев просто не реально, не всегда возможно создание сети таких станций, а использование связующих точек предполагает, что видимость на них обеспечивается, как минимум, с двух станций и точки расположены вне зоны деформаций (хотя это не обязательно). Поэтому не всегда представляется возможным выполнить преобразование координат и получить все векторы смещений марок в единой системе координат объекта.

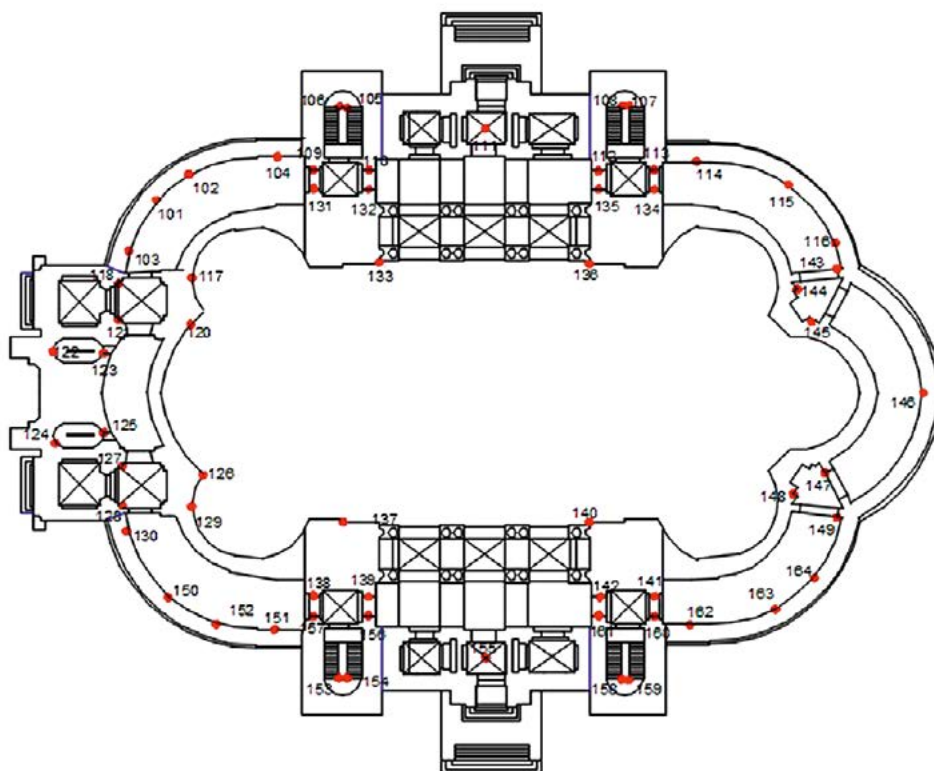
В связи с этим возникает идея использовать при оценке устойчивости зданий и сооружений инвариантные величины. Такими величинами, в частности, являются расстояния между деформационными марками. Расстояния можно вычислить по координатам или непосредственно измерить. Как следует из вышесказанного, преимущество использования расстояний в том, что в процессе измерений о системе координат можно не задумываться. Указанное обстоятельство может способствовать и значительному упрощению полевых работ.

Рассмотрим методику наблюдений, оценку точности получения координат деформационных марок и расстояний между ними на примере модели здания памятников культурного наследия (рис. 4).

Большинство зданий памятников культурного наследия (далее – памятники) г. Санкт-Петербурга и Ленинградской области представлены крестово-купольными храмами (рис.1). Этот архитектурный тип христианского храма сформировался в V–VIII веках в Византии и в странах христианского Востока. В классическом варианте представляет собой прямоугольный объём, центр которого разделен четырьмя столбами (пилонами) на девять ячеек. Столбы соединены со стенами и между собой арками. Перекрытием служат крестообразно расположенные цилиндрические своды, а над центральной ячейкой, на подпружных арках, возвышается барабан с куполом, переходы к которому заполнены парусами. К центральному квадрату примыкают четыре прямоугольных конца, перекрытые цилиндрическими сводами и ориентированные по сторонам света. Восточный конец завершается полукруглой нишей (апсидой), в которой находится алтарь. Угловые помещения между концами креста перекрыты сводами той или иной формы. Восточные угловые помещения, где располагаются дьяконник и жертвенник, тоже, как правило, завершаются апсидами. Таково основное композиционное ядро крестово-купольного храма [1].

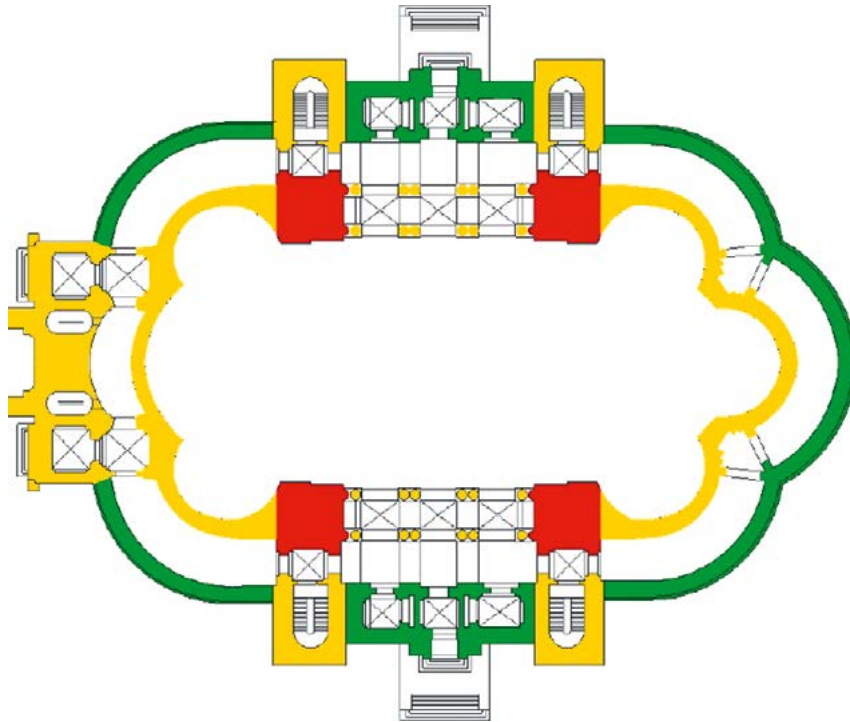
Известно также распределение нагрузок в храмах такого типа (рис.2).

Наибольшие нагрузки приходятся, очевидно, на основные пилоны. Соответственно наибольшая осадка также приурочена к фундаментам пилонов. Несколько меньшей явля-



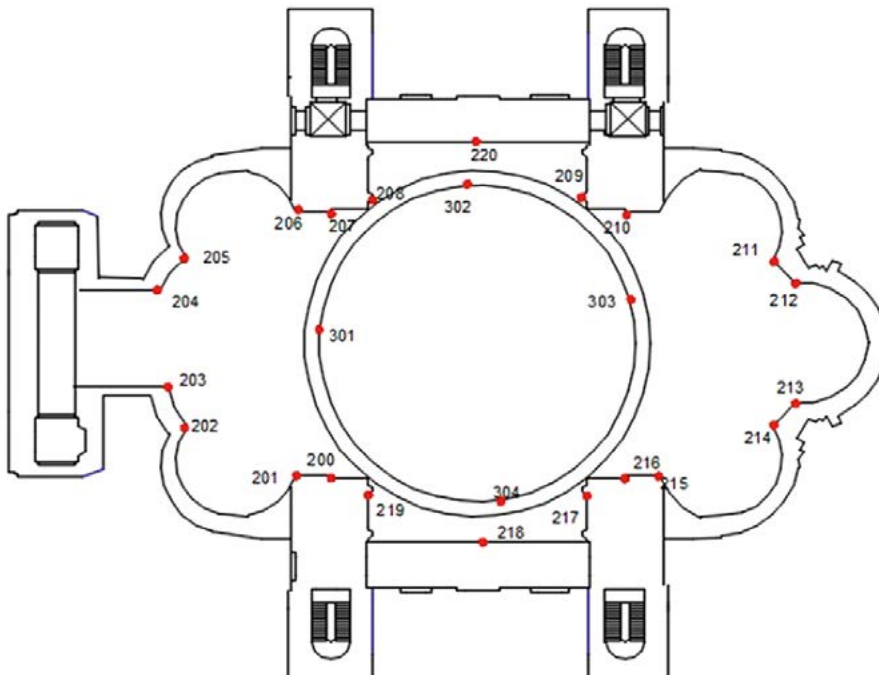
**Рисунок 1** — План крестово-купольного храма, схема размещения марок 1-й уровень (марки 101-164)

**Figure 1** — Plan of the cross-domed temple, the scheme of the 1st level marks (marks 101-164)



**Рисунок 2** — Распределение нагрузок в крестово-купольном храме: красный цвет – наибольшие нагрузки, желтый – средние нагрузки, зеленый – наименьшие нагрузки

**Figure 2** — The distribution of loads in the cross-domed temple: red – the greatest loads, yellow – medium loads, green – the smallest loads

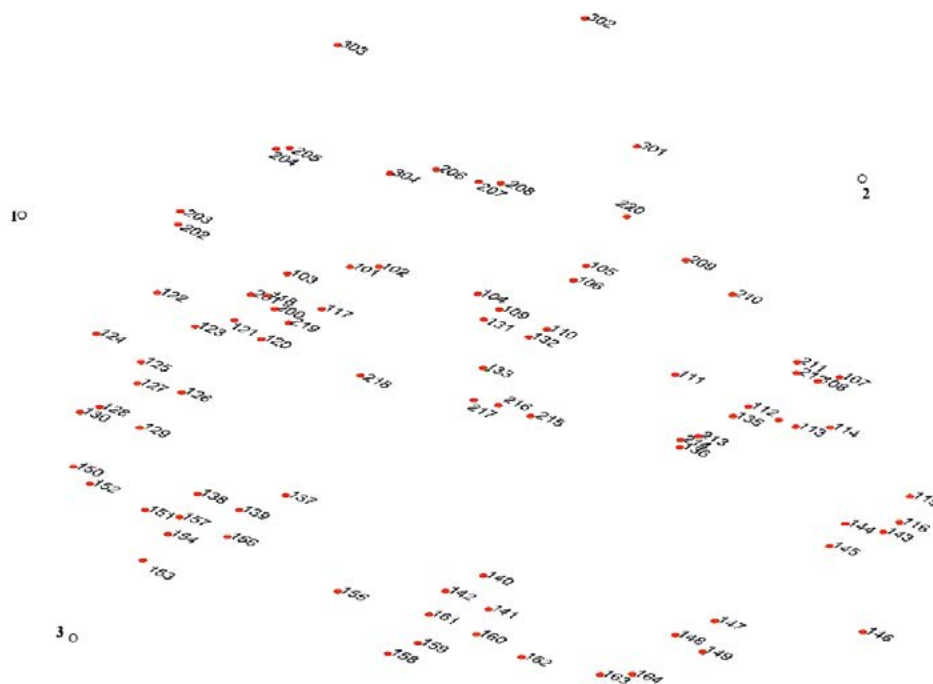


**Рисунок 3** — Схема размещения марок на втором и третьем уровнях

**Figure 3** — Scheme of marks at the second and third levels

ется нагрузка на стены периметра памятника, на которые опираются своды в алтарной и западной частях здания. К этой же группе можно отнести и стены лестничных клеток. В наименьшей степени нагружены стены боковых галерей вокруг памятника. Эти стены фактически нагружены собственным весом и весом части перекрытия и покрытия этажей галереи. Безусловно, здание работает как единое целое, что

приводит к существенному перераспределению нагрузок между элементами конструкции, поэтому реальная картина распределения нагрузок должна быть уточнена подробными расчетами конструкций. Однако такое качественное разделение по уровням нагруженности на предварительном этапе позволяет сделать предположение о характере ожидаемых деформаций памятника.



**Рисунок 4** — Схема размещения марок в пространстве: 1-3 опорные пункты, 101-164 – деформационные марки  
**Figure 4** — Scheme of marks in space: 1-3 strong points, 101-164 – deformation marks

Схема расположения деформационных марок на модели памятника представлена на рис.1 и рис.3.

Марки размещены с учетом нагрузок (рис.2) и требований нормативных документов [2,5,6].

Добавим опорные пункты 1-3 к модели памятника, и введем систему координат, как показано на рис.4. То есть, начало координат совместим с точкой 1, ось X – с точкой 2, а точка 3 будет находиться в плоскости точек 1 и 2.

Введенную выше систему координат будем считать единой системой координат объекта.

В работе [7] было выполнено исследование различных методов наблюдений за деформациями и сделан вывод в пользу полярной пространственной засечки. В частности, такая засечка может быть реализована с использованием электронных роботизированных тахеометров. В классической геодезии наблюдения выполняют по методу «свободных станций», связь между которыми обеспечивается, как минимум, наличием трех связующих марок. Это позволяет получать результаты измерений в единой системе координат объекта (рис.4).

Тогда на примере модели здания наблюдения с двух точек стояния тахеометра могут быть выполнены следующим образом (рис.5).

Так, с точки стояния I определены координаты марок: 136, 140, 137, 201, 202, 126, 120, 123, 122, 209, 104, 103, 133. С точки стояния II определены координаты марок 213, 214, 210, 133, 136, 137, 150, 124, 125, 120, 203, 101, 102. Марки 136, 137, 120, 133 являются связующими, с помощью которых выполняют преобразование координат марок в единую систему координат объекта.

После проведения нескольких циклов наблюдений вычисляют координаты деформационных марок в каждом цикле, а затем изменения координат между циклами наблюдений. Если изменения координат превышают точность

их определения, делают вывод о наличии деформаций на объекте.

Выполним оценку точности определения координат марок полярной пространственной засечкой. В этом случае прибором измеряются: горизонтальный угол  $\beta$ , вертикальный угол  $\nu$  и наклонное расстояние  $S$  до отражателя (CCR-рефлектора), установленного на марке  $i$  (Рис.6).

В результате измерений расстояния, горизонтального и вертикального угла до марки  $i$  получают ее пространственные координаты  $X_i, Y_i, Z_i$  в системе координат прибора (1).

$$\left. \begin{aligned} X_i &= S \cos \beta \cos \nu \\ Y_i &= S \sin \beta \cos \nu \\ Z_i &= S \sin \nu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В свою очередь, координаты пункта  $X_i, Y_i, Z_i$  являются взаимозависимыми (1). Выполним оценку точности определения координат пункта  $i$ .

#### Оценка точности определения координат марок

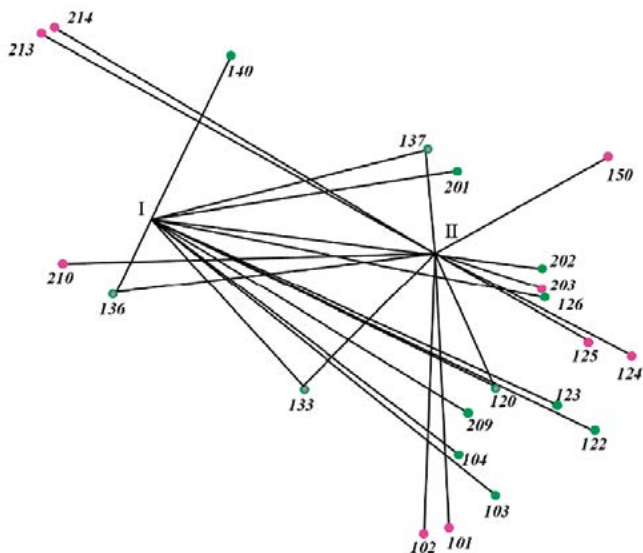
Наиболее полной формой, характеризующей точность и взаимозависимость случайных величин, служит ковариационная матрица  $K$ , каждый элемент которой связан с соответствующим элементом матрицы весовых коэффициентов соотношением  $K_{ij} = \mu^2 Q_{ij}$ , где  $\mu$  – средняя квадратическая погрешность единицы веса, которую можно выбирать произвольно.

В свою очередь, матрица весовых коэффициентов  $Q$  [4]:

$$Q = N^{-1} \quad (2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$N = A^T P A, \quad (3)$$



**Рисунок 5** — Пространственная полярная засечка:  $j$  – точка стояния тахеометра,  $i$  – наблюдаемая марка

**Figure 5** — Spatial polar intersection:  $j$  – the station of the tacheometer,  $i$  – the observed mark

где  $A$  – матрица коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ , получаемых как полный дифференциал уравнений связи выполненных измерений с определяемыми параметрами;  $P$  – весовая матрица.

$$A_{n \times t} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & t_n \end{bmatrix}; P_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

где  $n$  – число измерений,  $t$  – число неизвестных.

Определим коэффициенты, входящие в матрицу  $A$ .

Для измеренного расстояния  $S_{ij}$  уравнение связи между предварительными значениями координат конечных пунктов стороны, длина которой известна и измеренным значением этой длины (5):

$$S_{ij}^0 = \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (Z_j^0 - Z_i^0)^2} \quad (5)$$

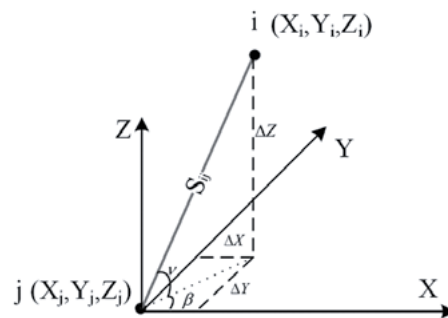
$$D_{ij}^0 = \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}$$

где  $X_j^0, X_i^0, Y_j^0, Y_i^0, Z_j^0, Z_i^0$  – приближенные значения координат пунктов  $i$  и  $j$ ,  $S_{ij}^0$  – приближенное значение измеренного наклонного расстояния между точкой стояния  $j$  и точкой визирования  $i$ ,  $D_{ij}^0$  – приближенное горизонтальное проложение между пунктами  $i$  и  $j$ .

Вычислим коэффициенты для измеренного наклонного расстояния, найдя полный дифференциал функции (5). В результате сокращений и использования значений  $\cos$  и  $\sin$  получим:

$$a_{ij} = \frac{\partial S_{ij}^0}{\partial X_i^0} = -1 \cdot \frac{D_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdot \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_{ij}^0} = -\cos \beta_{ij}^0 \cos v_{ij}^0$$

где  $\beta_j^0, \beta_i^0$ , – приближенные значения горизонтальных углов, полученных из предварительных координат точек  $i$



**Рисунок 6** — Пример метода «свободных станций»:  $I, II$  – точки стояния тахеометра, 1-9 – деформационные марки, расположенные на здании

**Figure 6** — An example of the “free stations” method:  $I, II$  – station of the total station, 1-9 – deformation marks located on the building

и  $j$   $v_{ij}^0, v_{ij}^0$ , – приближенные значения вертикальных углов, полученных из предварительных координат точек  $i$  и  $j$ .

Подобным образом определим коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ :

$$b_{ij} = \frac{\partial S_{ij}^0}{\partial Y_i^0} = -1 \cdot \frac{D_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdot \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_{ij}^0} = -\sin \beta_{ij}^0 \cos v_{ij}^0$$

$$c_{ij} = \frac{\partial S_{ij}^0}{\partial Z_i^0} = -1 \cdot \frac{\Delta Z_{ij}^0}{S_{ij}^0} = -\sin v_{ij}^0$$

Поскольку нам не нужно знать координаты точки стояния тахеометра, то коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  не определяются.

Для измеренного вертикального угла  $v_{ij}$  уравнение связи выглядит следующим образом (6):

$$v_{ij}^0 = \text{arctg} \left( \frac{Z_j^0 - Z_i^0}{D_{ij}^0} \right) = \text{arctg} \left( \frac{Z_j^0 - Z_i^0}{\sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}} \right) =$$

$$= \text{arccctg} \left( \frac{\sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}}{Z_j^0 - Z_i^0} \right) =$$

$$= \text{arccctg} \left( \frac{\sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}}{\Delta Z_{ij}^0} \right) \quad (6)$$

Вычислим коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  для измеренного вертикального угла, найдя полный дифференциал функции (6):

$$a_{ij} = \frac{\partial v_{ij}^0}{\partial X_i^0} = \frac{\Delta Z_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdot \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_{ij}^0} \cdot \frac{1}{S_{ij}^0} = \cos \beta_{ij}^0 \sin v_{ij}^0 \frac{1}{S_{ij}^0} \rho$$

$$b_{ij} = \frac{\partial v_{ij}^0}{\partial Y_i^0} = \frac{\Delta Z_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdot \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_{ij}^0} \cdot \frac{1}{S_{ij}^0} = \sin \beta_{ij}^0 \sin v_{ij}^0 \frac{1}{S_{ij}^0} \rho$$

$$c_{ij} = \frac{\partial v_{ij}^0}{\partial Z_i^0} = -\frac{D_{ij}^0}{S_{ij}^0} \cdot \frac{1}{S_{ij}^0} = -\cos v_{ij}^0 \frac{1}{S_{ij}^0} \rho$$

Для измеренного горизонтального угла  $\beta_{ij}$  уравнение связи (7):

$$\beta_{ij}^0 = \text{arctg} \left( \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0} \right) \quad (7)$$

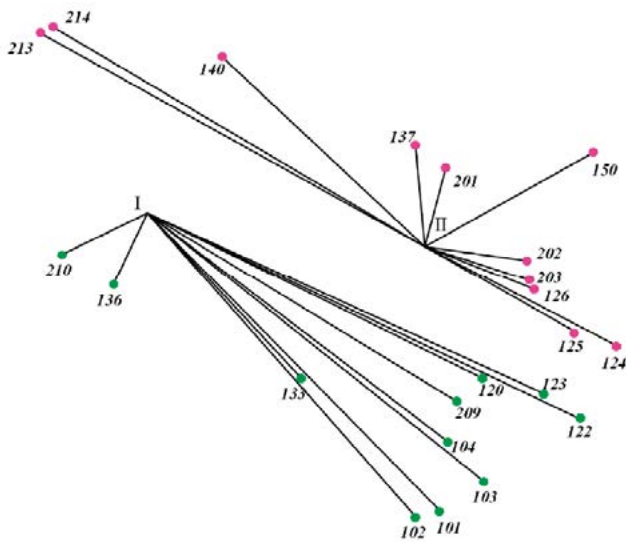


Рисунок 7 — Линейная пространственная засечка  
Figure 7 — Linear spatial intersection

Вычислим коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  для измеренного горизонтального угла, найдя полный дифференциал функции (7):

$$a_{ij} = \frac{\partial \beta_{ij}^0}{\partial X_i^0} = \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_{ij}^0} \cdot \frac{1}{D_{ij}^0} = \frac{\sin \beta_{ij}^0}{D_{ij}^0} \rho$$

$$b_{ij} = \frac{\partial \beta_{ij}^0}{\partial Y_i^0} = \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_{ij}^0} \cdot \frac{-1}{D_{ij}^0} = -\frac{\cos \beta_{ij}^0}{D_{ij}^0} \rho$$

$$c_{ij} = \frac{\partial \beta_{ij}^0}{\partial Z_i^0} = 0$$

В качестве весов принимают величины, обратно пропорциональные средним квадратическим ошибкам (далее – СКО) измеренных величин:

$$P_i = \frac{1}{m_i^2},$$

где  $m_i$  – средние квадратические ошибки измеренных величин.

После составления матриц  $A$  и  $P$  вычисляют матрицу  $N$  по формуле (3) и матрицу весовых коэффициентов  $Q$  по формуле (2). При  $\mu = 1$ ,  $Q = K$ .

Порядок ковариационной матрицы  $K$  соответствует количеству неизвестных (определяемых координат марок). Диагональные элементы матрицы – дисперсии определяемых параметров. Недиагональные элементы – корреляционные моменты (ковариации).

Тогда точность положения пункта  $i$  по осям координат будет равна (8):

$$m_{X_i} = \sqrt{Q_{k_X, k_X}}, m_{Y_i} = \sqrt{Q_{k_Y, k_Y}}, m_{Z_i} = \sqrt{Q_{k_Z, k_Z}} \quad (8)$$

где  $m_{X_i}$ ,  $m_{Y_i}$ ,  $m_{Z_i}$  – СКО координат  $X, Y, Z$  пункта  $i$ ,  $k_X$ ,  $k_Y$ ,  $k_Z$  – номер столбца (строки) матрицы весовых коэффициентов, соответствующий параметрам  $X, Y, Z$  пункта  $i$ .

Рассмотрим пример определения координат одной деформационной марки полярной пространственной засечкой:  $S = 50$  м,  $\beta = 135^\circ$ ,  $\nu = 50^\circ$ . Вычисления выполним на примере высокоточного тахеометра Leica TDRA 6000, для которого точность измерения расстояния  $m_S = 0,25$  мм (погрешность вдоль визирного луча) и угла  $m_\nu = m_\beta = 0,5''$  (погрешность поперек визирного луча). Или при отстоянии тахеометра от деформационной марки, равном 50 м составит:  $S_{\Delta} \frac{m_\beta}{\rho} = 0,1 \text{ мм}$ .

На практике такая точность труднодостижима. Точность измерения углов  $m_\beta$  зависит от опыта наблюдателя, качества визирных целей их освещенности, стабильности положения и многих других нюансов. Поэтому в реальных условиях  $m_\beta$  не меньше  $1''$ , тогда точность снизится до  $0,2 - 0,3$  мм на расстоянии 50 м [3].

Ниже представлена табл.1 с коэффициентами  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ , формирующих матрицу  $A$ .

Ковариационная матрица ошибок координат  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} 0,015 & -0,013 & -0,020 \\ -0,013 & 0,015 & 0,020 \\ -0,020 & 0,020 & 0,038 \end{pmatrix}$$

Тогда точность положения пункта  $i$  по осям координат будет равна:

$$m_{X_i} = m_{Y_i} = \sqrt{0,015} = 0,12 \text{ мм}; m_{Z_i} = \sqrt{0,038} = 0,19 \text{ мм};$$

$$m_{Z_i} = \sqrt{0,038} = 0,19 \text{ мм}$$

Диагональные элементы матрицы совпадут с вычисленными по формулам (9-11).

Запишем формулы определения СКО определения координат  $m_X$ ,  $m_Y$ ,  $m_Z$ , для марки  $i$  (9-11):

$$m_{X_i}^2 = \cos^2 \beta \cos^2 \nu \cdot m_S^2 + S^2 \cos^2 \nu \sin^2 \beta \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + S^2 \cos^2 \beta \sin^2 \nu \frac{m_\nu^2}{\rho^2} \quad (9)$$

$$m_{Y_i}^2 = \sin^2 \beta \cos^2 \nu \cdot m_S^2 + S^2 \cos^2 \nu \cos^2 \beta \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + S^2 \sin^2 \beta \sin^2 \nu \frac{m_\nu^2}{\rho^2} \quad (10)$$

$$m_{Z_i}^2 = \sin^2 \nu \cdot m_S^2 + S^2 \cdot \cos^2 \nu \frac{m_\nu^2}{\rho^2} \quad (11)$$

Таким образом, при различном отстоянии тахеометра от деформационной марки и при различных углах  $\nu$  и  $\beta$  можно

Таблица 1 — Исходные данные и коэффициенты матрицы  $A$   
Table 1 — Source data and coefficients of matrix  $A$

Углы, расстояния	Направления	S, м	$\beta$ , градусы	$\nu$ , градусы	a	b	c
$\beta$	j-i	50	135	50	-4,538	-4,538	0
$\nu$	j-i				-2,235	2,235	-2,658
S	j-i				-0,454	0,454	0,766

вычислить минимальные и максимальные ошибки определения координат.

В работе [9] автор выполняет исследование точности положения точки в трехмерном пространстве. Для уменьшения влияния корреляции на величину радиальных ошибок следует учитывать геометрию построения и стремиться к соотношению угловых и линейных измерений,

равному  $\frac{m_{\beta,v}}{\rho} \div \frac{m_s}{S} = 1$ . При соотношении  $\frac{m_{\beta,v}}{\rho} \div \frac{m_s}{S} \geq 3$  точность линейно-угловой сети и сети трилатерации становится одинаковой. Получено наименьшее значение ошибки, когда горизонтальный угол равен  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  или  $270^\circ$  и вертикальный угол принимает любое значение от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

Таким образом, можно выбрать оптимальные точки стояния тахеометра, когда геометрия сети, и, следовательно, точность определения координат марок будет наилучшей.

При наблюдениях за деформациями памятников в условиях реставрационных работ возникают такие ситуации, когда использование опорных пунктов не представляется возможным из-за их удаленности от памятника или уплотненной застройки вблизи памятника. Или, например, рядом с наблюдаемым памятником вырывают котлован. Кроме того, не всегда удается сохранять постоянство используемой схемы наблюдений, поэтому точку стояния прибора не закрепляют. Тогда определение координат деформационных марок с использованием тахеометра выполняют по методу «свободных станций». Ввиду реставрационных работ (в частности, наличия строительных лесов на объекте исследования), обеспечить видимость на связующие марки не всегда представляется возможным. Тогда схема наблюдений на точках стояния I и II будет выглядеть следующим образом (рис.7).

Выполняя наблюдения по методу «свободных станций», без использования опорных пунктов, координаты марок в каждом цикле получают в разных системах координат.

Использовать преобразование координат не представляется возможным, поскольку отсутствуют связующие марки (рис.7).

Тогда возникает задача сравнения результатов наблюдений, полученных между смежными циклами. Это заставляет перейти к использованию инвариантных параметров для оценки деформаций. В частности, деформации можно оценить, зная расстояния и их изменения между деформационными марками [3]. В свою очередь, расстояния являются функциями от координат.

Выполним оценку точности определения расстояния между деформационными марками.

### Оценка точности определения расстояния между деформационными марками

Расстояние между марками и является функцией от координат (12):

$$L_{ig} = \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2} \quad (12)$$

Вычислим СКО определения расстояния  $m_{L_{ig}}$  между марками  $i$  и  $g$  (13). Для этого определим частные производные функции (12):

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial X_i} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (X_i - X_g) = \frac{(X_i - X_g)}{L_{ig}}$$

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial X_g} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (X_i - X_g) \cdot -1 = -\frac{(X_i - X_g)}{L_{ig}}$$

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial Y_i} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (Y_i - Y_g) = \frac{(Y_i - Y_g)}{L_{ig}}$$

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial Y_g} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (Y_i - Y_g) \cdot -1 = -\frac{(Y_i - Y_g)}{L_{ig}}$$

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial Z_i} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (Z_i - Z_g) = \frac{(Z_i - Z_g)}{L_{ig}}$$

$$\frac{\partial L_{ig}}{\partial Z_g} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 + (Z_i - Z_g)^2}} \cdot 2 \cdot (Z_i - Z_g) \cdot -1 = -\frac{(Z_i - Z_g)}{L_{ig}}$$

$$m_{L_{ig}}^2 = \left( \frac{X_g - X_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{X_i}^2 + \left( \frac{Y_g - Y_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{Y_i}^2 + \left( \frac{Z_g - Z_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{Z_i}^2 + \left( \frac{X_g - X_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{X_g}^2 + \left( \frac{Y_g - Y_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{Y_g}^2 + \left( \frac{Z_g - Z_i}{L_{ig}} \right)^2 m_{Z_g}^2 \quad (13)$$

где  $m_{X_i}, m_{Y_i}, m_{Z_i}, m_{X_g}, m_{Y_g}, m_{Z_g}$  – СКО определения координат деформационных марок  $i$  и  $g$ , полученные из ковариационной матрицы по формулам (8).

Таким образом, в зависимости от расположения тахеометра по отношению к деформационным маркам, можно вычислить СКО определения всех координат марок, расположенных на модели здания (рис. 1 и рис. 2) и СКО определения расстояний между ними. Зная СКО расстояния, можно вычислить нормированную матрицу деформаций и определить квазиопорные марки, как это показано в работе [3]. Такие марки определяют, когда отсутствуют опорные пункты. Относительно квазиопорных вычисляют вектора смещений остальных марок в единой системе координат объекта и выполняют анализ векторов смещений на предмет деформаций, например, как представлено в работе [8].

### Выводы

В результате проделанной работы получены следующие выводы:

1. Выполнена оценка точности определения положения пунктов сети, полученных с использованием простран-

ственной полярной засечки;

2. Разработаны рекомендации по оптимальному расположению точек стояния прибора, когда точность определе-

ния координат марок будет наилучшей;

3. Выполнена оценка точности определения расстояния между деформационными марками.

### Литература

1. Девина Р.А. Микроклимат церковных зданий [Электронный ресурс] // ARTConservation мастерская. М.: ГосНИИР, 2000. URL: <http://art-con.ru/node/2064> (дата обращения 20.09.2018).
2. ГОСТ 24846 – 2012. Грунты. Методы измерений деформаций оснований зданий и сооружений (2012) // Москва: Стандартинформ.
3. Контроль сохранности положения элементов спутниковых антенных систем в период их наземной эксплуатации // 28 антенная конференция Европейского космического агентства, Нордвик, 2005.
4. Маркузе Ю.И. Книга 2. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных

вычислений: учеб. пособие для вузов. М.: МИИГАиК, 2005. 280 с.

5. Реставрационные нормы и правила. Методические рекомендации по проведению научно-исследовательских, изыскательских, проектных и производственных работ, направленных на сохранение объектов культурного наследия (памятников истории и культуры) народов Российской Федерации. Методическое издание (2013) // Москва: ФГУП ЦНРПМ.
6. Свод реставрационных правил: СРП-2007. Рекомендации по проведению научно-исследовательских, изыскательских, проектных и производственных работ, направленных на сохранение объектов культурного наследия (памятников истории и культуры)

народов Российской Федерации: нормативно-методическое издание (2011) // Москва.

7. Степанова О.С. Анализ способов геодезических наблюдений за деформациями наследия // Горный информационно-аналитический бюллетень. Москва. 2014. N 4. С. 418-422.
8. Царёва О.С. Определение относительных деформаций по изменениям расстояний между деформационными марками // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. N 5. С. 29-37.
9. Шеховцов Г.А. О скалярной оценке точности положения точки в трёхмерном пространстве // Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1990. N 2. С. 27-32.

### References

1. Devina R.A. Mikroklimat tserkovnykh zdaniy [Microclimate of church buildings] [Electronic resource]. ARTConservation masterskaya. Moscow, GosNIIR, 2000. URL: <http://art-con.ru/node/2064> (data obrashcheniya 20.09.2018). (In Russian).
2. GOST 24846 – 2012. Grunty. Metody izmereniy deformatsiy osnovaniy zdaniy i sooruzheniy (2012). Moscow: Standartinform. (In Russian).
3. Kontrol' sokhrannosti polozheniya elementov sputnikovykh antennykh sistem v period ikh nazemnoy ekspluatatsii. 28th European Space Agency Antenna Conference, Nordvik, 2005. (In Russian).
4. Markuze Yu.I. Kniga 2. Osnovy metoda naimen'shikh kvadratov i uravnitel'nykh vychisleniy: studies. allowance. Moscow, MIIGAIK,

2005. 280 p. (In Russian).

5. Restavratsionnye normy i pravila. Metodicheskie rekomendatsii po provedeniyu nauchno-issledovatel'skikh, izyskatel'skikh, proektnykh i proizvodstvennykh rabot, napravlennykh na sokhranenie ob»ektov kul'turnogo naslediya (pamyatnikov istorii i kul'tury) narodov Rossiyskoy Federatsii. Metodicheskoe izdanie (2013). Moscow: FGUP TsNRPM. (In Russian).
6. Svod restavratsionnykh pravil: SRP-2007. Rekomendatsii po provedeniyu nauchno-issledovatel'skikh, izyskatel'skikh, proektnykh i proizvodstvennykh rabot, napravlennykh na sokhranenie ob»ektov kul'turnogo naslediya (pamyatnikov istorii i kul'tury) narodov Rossiyskoy Federatsii: normativno-metodicheskoe izdanie (2011). Moscow. (In Russian).

7. Stepanova O.S. Analiz sposobov geodezicheskikh nablyudeniye za deformatsiyami primenitel'no k ob»ektam kul'turnogo naslediya. Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'. Moscow. 2014. N 4. pp. 418-422. (In Russian).

8. Tsareva O.S. Opredelenie otnositel'nykh deformatsiy po izmeneniyam rasstoyaniy mezhdu deformatsionnymi markami. Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy [Earthquake engineering. Constructions safety]. 2018. N 5. Pp. 29-37. (In Russian).
9. Shekhovtsov G.A. O skalyarnoy otsenke tochnosti polozheniya tochki v trekhmernom prostranstve. Izv. Vuzov. Geodeziya i aerofotos»emka. 1990. N 2. Pp. 27-32. (In Russian).

**Для цитирования:** Царёва О.С. Оценка точности определения координат деформационных марок и расстояний между ними // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. № 2. С. 49-56.

**For citation:** Tsareva O.S. Evaluation of the Accuracy of Determining the Coordinates of Deformation Marks and the Distances Between Them. Seysmostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii [Earthquake engineering. Constructions safety], 2019, no. 2, pp. 49-56. (In Russian).